



# Invariants des hypermatrices

Jean-Gabriel Luque

## ► To cite this version:

Jean-Gabriel Luque. Invariants des hypermatrices. Autre [cs.OH]. Université de Marne la Vallée, 2008. tel-00250312

**HAL Id: tel-00250312**

**<https://theses.hal.science/tel-00250312>**

Submitted on 11 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

Université Paris-Est, Marne-la-Vallée

# Habilitation à diriger des recherches

Spécialité Informatique

présentée par

**Jean-Gabriel Luque**

## Invariants des hypermatrices

soutenue le 12 décembre 2007 devant le jury composé de

Daniel Barsky,	Rapporteur,
Jean-Pierre Gazeau,	Rapporteur,
Christophe Reutenauer,	Rapporteur,
Maxime Crochemore,	Examineur,
Jacques Désarménien,	Examineur,
Henri Gaudier,	Invité,
Florent Hivert,	Examineur,
Ronald King,	Examineur,
Alain Lascoux,	Examineur,
Jean-Yves Thibon,	Examineur,
Jiang Zeng,	Examineur.

## Liste des publications

- [P1 ] *Hyperdeterminants on semilattices*, à paraître dans Linear and Multilinear algebra.
- [P2 ] avec G. Duchamp, J.-C. Novelli, C. Tollu et F. Toumazet, *Hopf algebra of diagrams*. FPSAC'O7.
- [P3 ] avec J.C. Novelli et J.-Y. Thibon, *Period polynomials and Ihara brackets*, Journal of Lie Theory, **17** (2), 229-239, 2007.
- [P4 ] avec J.-Y. Thibon et F. Toumazet, *Unitary invariants of  $k$ -qubits*, à paraître dans Mathematical Structures in Computer Sciences.
- [P5 ] avec G. Duchamp, K. Penson et C. Tollu, *Free quasi symmetric functions, product actions and quantum field theory of partitions*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire **54** A, 12p, électronique.
- [P6 ] avec G. Duchamp et M. Flouret, *Transitive Hall sets*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, **54**, 19p, électronique.
- [P7 ] avec J.-Y. Thibon, *Algebraic invariants of five qubits*, J. Phys. A : Math. Gen. 39 (2006) 371-377.
- [P8 ] avec G. Duchamp *Lazard's Elimination in traces is finite-state recognizable*, à paraître dans Int. Jour. of Alg. Comp..
- [P9 ] avec J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions associated with a code, Lazard factorisation and Witt vectors*, Journées Montoises d'Informatique Théorique 2004 ; version étendue à paraître dans DMTCS.
- [P11 ] avec E. Briand, J.-Y. Thibon et F. Verstrate, *the moduli space of the three qutrit states*, Journal of Mathematical Physics, vol. 45, num. 12, pp. 4855–4867, 2004.
- [P12 ] avec J.-Y. Thibon, *Hyperdeterminantal aspect of Selberg and Aomoto integrals*, Molecular Physics, vol 102, n 11-12, 1351-1359, 10-20 June 2004. .
- [P13 ] avec E. Briand et J.-Y. Thibon, *A complete set of covariants of the four qubit system*, J. Phys A : Math. Gen. 36 (2003), 9915-9927.
- [P14 ] avec J.-Y. Thibon, *Polynomial invariants of four qubits*, Phys. Rev. A 67, 042303 (2003).
- [P15 ] avec J.-Y. Thibon, *Hankel hyperdeterminants and Selberg integrals*, J.Phys. A : Math. Gen. 36 (2003) 5267-5292.

- 
- [P16] ]avec J.-Y. Thibon, *Pfaffian and Hafnian identities in shuffle algebras*, Advances in Applied Mathematics, 29 (2002) 620-646.
- [P17] ] avec G. Duchamp, M. Flouret et E. Laugerotte, *Direct and dual laws for automata with multiplicities*, Theor. Comp. Sci. 267 (2001) 105-120.
- [P18] ] avec G. Duchamp, *Transitive factorizations*, , Discret. Math. special issues FPSAC'99.
- [P19] ] avec G. Duchamp et É. Laugerotte, *On the support of graph Lie algebras*, *Theoretical Computer Science*, 273, 283-294, (2002).
- [P20] ] avec G. Duchamp et É. Laugerotte, *Extending the scalars of minimization*, Proceedings, SCI 2001.
- [P21] ] avec G. Duchamp, *Congruences Compatible with the Shuffle Product*, Proceedings, (FPSAC 2000), D. Krob, A.A. Mikhalev Eds., Springer.



# Invariants des hypermatrices

Jean-Gabriel Luque

11 février 2008



*À Antoine et Camille.*





## Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à remercier Jean-Yves Thibon pour son soutien et pour m'avoir accueilli dans l'équipe de Combinatoire. En particulier, je le remercie de m'avoir initié à la théorie des invariants. Les nombreuses discussions que nous avons eues sur le sujet ont été de point de départ d'une fructueuse collaboration. Je tiens dans ces quelques lignes à lui exprimer toute ma gratitude, mon amitié et mon respect.

Je voudrais ensuite remercier Daniel Barsky d'avoir accepté d'écrire un rapport sur ce mémoire ainsi que pour toutes les discussions scientifiques que nous avons eues (en particulier lors des Séminaires Lotharingien de Combinatoire).

J'ai été particulièrement touché par le fait que Christophe Reutenauer ait accepté d'être rapporteur de mon habilitation. Ces travaux, en particulier ceux concernant les algèbres de Lie libres, ont inspiré mes premières recherches et ont été une des raisons pour lesquelles je me suis intéressé à la combinatoire.

Je suis également très honoré que Jean-Pierre Gazeau ait bien voulu rédiger un rapport sur ce mémoire.

Je remercie Ronald King d'avoir accepté d'être dans mon jury ainsi que pour les conversations scientifiques que nous avons eues en particulier lors des séminaires de Combinatoire, Informatique et Physique du LIPN.

Je remercie Henri Gaudier d'avoir bien voulu faire partie de mon jury ainsi que pour les discussions autour des vecteurs de Witt.

Je tiens aussi à remercier Jiang Zeng pour sa présence dans mon jury.

Alain Lascoux a accepté de faire partie de mon jury, je l'en remercie. Je le remercie également pour son amitié, pour toutes les discussions que nous avons eues ainsi que pour tous les conseils qu'il a donnés avec patience et pédagogie au mauvais élève que je suis.

Maxime Crochemore et Jacques Désarménien ont contribué à ma bonne intégration dans le laboratoire d'informatique de l'IGM. Je leur en suis d'autant plus reconnaissant de faire partie de mon jury.

Enfin, Florent Hivert a partagé mon bureau pendant quelques années. Je suis heureux qu'il participe à l'évaluation de mon habilitation.

Je tiens aussi à remercier mes collègues car ils ont tous participé, de manière directe ou indirecte à la réussite de cette habilitation. Je risque de ne pas être exhaustif, j'espère que les oubliés me pardonneront. Je remercie tout d'abord les membres de l'équipe que je n'ai pas déjà cités. En particulier, Jean-Christophe Novelli pour son amitié, ses conseils et sa gestion du groupe de travail du Vendredi matin, François Descouens et Adrien Boussicault, pour les discussions scientifiques ou non que nous avons eues, Teresa Gomez-Diaz pour ses conseils sur la réalisation des présentations et des posters. J'ai une pensée pour toutes les personnes participant à l'ambiance exceptionnelle du Laboratoire. En particulier pour Marc Zipstein et Sébastien Paumier sans lesquels les réunions du midi seraient certainement moins pédagogiques. Je remercie également les collègues de l'IUT : Renaud Eppstein, Stéphane Lohier (ancien de l'IUT), Florence Bister, Nicolas Classeau, Anne Tasso *etc.* J'ai une pensée particulière pour Martine Thireau, ses qualités humaines et professionnelles m'ont retiré de nombreuses épines du pied. Je remercie aussi les membres du LIPN de Paris 13, Christophe Tollu, Frédéric Toumazet et particulièrement Gérard Duchamp, qui fût mon directeur de thèse, avec lequel j'ai toujours un immense plaisir à discuter et à travailler.

Enfin et ce ne sont pas les moindres. Je remercie mes amis (en particulier mon "vieux" copain Laurent et Pol qui partage de mes voyages matinaux et ferroviaires), ma famille, mes parents Gabrielle et Manuel et aussi (et surtout) ma compagne Severine et mes deux petits monstres Antoine et Camille.



## Résumé

Ce mémoire est consacré à la théorie des invariants des hypermatrices. L'origine de la théorie des invariants date du milieu du XIX<sup>ième</sup> siècle. Le problème général, tel qu'il fut énoncé par Cayley en 1843, consiste à trouver une description de l'algèbre des polynômes invariants dans le but d'automatiser le raisonnement géométrique. Assez rapidement de fortes limitations dues à la taille des calculs se manifestèrent et cette discipline se trouva de moins en moins étudiées jusque dans les années 1950 lorsque fut développée la théorie géométrique des invariants. De nos jours, l'accroissement de la puissance de calcul permet de compléter d'anciens travaux qui n'avaient pu aboutir faute de moyen informatique ainsi que de traiter de nouveaux cas. L'intérêt de cette discipline s'est accru depuis peu grâce à la découverte d'un lien avec une notion issue de la mécanique quantique et qui est à la base de l'informatique quantique : l'intrication. Le phénomène d'intrication est apparu en 1937, sous la plume septique de trois physiciens, Einstein, Podolsky et Rozen qui voyaient en lui une preuve de la non consistance de la théorie quantique, et est connu depuis sous le nom de paradoxe EPR. Depuis, de nombreuses expériences, dont la célèbre expérience d'Alain Aspect, ont confirmé l'existence des états intriqués. Ce mémoire se décompose en deux parties. Dans la première, nous exposons les techniques fondamentales de la théorie des invariants ainsi que le lien avec l'intrication tel qu'il a été proposé par A. Klyachko. Nous montrons que l'implémentation de l'algorithme de Gordan sur un système de calcul formel permet de calculer des ensembles fondamentaux d'invariants et de covariants de certaines formes multilinéaires. En particulier, nous illustrons ce type de calcul en donnant un système complet de générateurs de l'algèbre des covariants pour une forme quadrilinéaire (système de 4-qubits). Nous montrons aussi les limites de cette approche : en donnant des éléments de calcul de la forme quintilinéaire (système de 5-qubits), nous voyons que la complexités sur-exponentielle des algèbres d'invariants interdit la généralisation de cette méthode. Pire, même si la description de ces algèbres en terme de générateurs et relations pouvait être obtenue, celle-ci serait humainement inexploitable. Nous proposons alors des pistes consistant à ne considérer que certains invariants ayant des propriétés remarquables (par exemple en étudiant la structure de Cohen-Macaulay de ces algèbres). La seconde partie est consacrée à un invariant particulier, l'hyperdéterminant. Ce polynôme

généralise le déterminant de la façon la plus simple possible : il s'agit d'une somme multi-alternée sur le produit de plusieurs groupes symétriques. Après avoir donné quelques propriétés générales, nous étudions certains cas particuliers comme les hyperdéterminants de Hankel, ou les hyperdéterminants de tenseurs dont les entrées ne dépendent que du pgcd des indices *etc.*. De nombreux résultats de cette partie sont appliqués au calcul d'intégrales itérées. En particulier, nous donnons une généralisation du théorème de Heine, une preuve alternative de l'intégrale de Selberg et des généralisations des intégrales de de Bruijn.

### **Mots clés**

Combinatoire, Théorie des invariants, Hypermatrice, Hyperdeterminant, Intrication, Hyperdeterminant de Hankel, Qubit, Information Quantique, Polytope Complexe, Polynômes de Jack, Polynômes de Macdonald, Discriminant, Intégrale de Selberg, Intégrale de Kaneko, Pfaffien, Hyperpfaffien, Fonction Hypergéométrique.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>I</b>	<b>Invariants des formes multilinéaires et informatique quantique</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>Polynômes invariants et états intriqués</b>	<b>23</b>
3.1	Système dynamique quantique . . . . .	23
3.2	États purs intriqués . . . . .	24
3.3	États purs et formes multilinéaires . . . . .	26
3.4	L'exemple des 2 qubits; le paradoxe EPR . . . . .	27
3.5	L'exemple des 3-qubits . . . . .	29
3.6	Invariants et covariants . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Formes binaires multilinéaires</b>	<b>35</b>
4.1	Introduction . . . . .	35
4.2	Séries de Hilbert . . . . .	37
4.2.1	Dimension des espaces . . . . .	37
4.2.2	Séries de Hilbert en terme d'opérateurs Omega de Macmahon . . . . .	38
4.2.3	Exemple : Les formes binaires trilinéaires . . . . .	41
4.3	Calcul des covariants . . . . .	42
4.4	Covariants des formes binaires quadrilinéaires . . . . .	44
4.4.1	La série de Hilbert . . . . .	44
4.4.2	L'algèbre des invariants . . . . .	45
4.4.3	Un ensemble fondamental de Covariants . . . . .	48

4.4.4	Covariants rationnels . . . . .	49
4.4.5	Syzygies . . . . .	50
4.5	Invariants des formes binaires quintilinéaires . . . . .	51
4.5.1	Série de Hilbert . . . . .	51
4.5.2	Les invariants les plus simples . . . . .	52
4.5.3	Conclusion . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Forme ternaire trilinéaire</b>	<b>57</b>
5.1	Introduction . . . . .	57
5.2	L'espace des orbites . . . . .	59
5.3	Les invariants fondamentaux . . . . .	60
5.4	Formes normales et invariants . . . . .	62
5.5	Conclusion . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Invariants unitaires des formes binaires</b>	<b>67</b>
6.1	Introduction . . . . .	67
6.2	Obtenir les invariants unitaires à partir des covariants linéaires	68
6.3	Petits invariants unitaires . . . . .	70
6.4	Exemples . . . . .	72
6.4.1	Entropie linéaire . . . . .	72
6.4.2	Invariants unitaires des 3-qubits . . . . .	72
6.4.3	Invariants unitaires de 4-qubits . . . . .	75
6.5	Conclusion . . . . .	76
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>77</b>
<b>II</b>	<b>Hyperdéterminants</b>	<b>79</b>
<b>8</b>	<b>Introduction</b>	<b>81</b>
<b>9</b>	<b>Propriétés générales</b>	<b>85</b>
9.1	Définitions . . . . .	85
9.2	Hyperdéterminant d'un produit . . . . .	86
9.3	Développement de Laplace des hyperdéterminants . . . . .	88
<b>10</b>	<b>Hyperdéterminants de Hankel</b>	<b>91</b>
10.1	Introduction . . . . .	91
10.2	Généralités . . . . .	92

10.2.1 Définitions et premières propriétés . . . . .	92
10.2.2 Hyperdéterminants et puissances paires du Vandermonde . . . . .	95
10.3 Une preuve hyperdéterminantale de l'intégrale de Selberg . . . . .	96
10.4 Exemples d'hyperdéterminants de Hankel . . . . .	99
10.5 Hyperdéterminants de Hankel et polynômes de Jack . . . . .	100
10.5.1 Polynômes de Jack . . . . .	100
10.5.2 Polynômes de Jack quasi-rectangulaires . . . . .	102
10.5.3 Puissances paires du Vandermonde . . . . .	103
10.5.4 Intégrale de Kaneko et Hyperturàniens décalés . . . . .	105
10.6 Conclusion . . . . .	107
<b>11 Hyperdéterminants sur des semi-treillis . . . . .</b>	<b>109</b>
11.1 Introduction . . . . .	109
11.2 $\mathfrak{F}$ -déterminants . . . . .	110
11.3 Théorème de Lindström pour les $\mathfrak{F}$ -déterminants . . . . .	111
11.4 Des mineurs . . . . .	112
11.5 Conclusion . . . . .	114
<b>12 Hyperpfaffiens . . . . .</b>	<b>115</b>
12.1 Introduction . . . . .	115
12.2 Généralités . . . . .	116
12.3 Formules de Wick d'ordre supérieur et applications . . . . .	118
12.4 Conclusion . . . . .	121
<b>13 Conclusion . . . . .</b>	<b>123</b>
<b>A Liste des générateurs de l'algèbre des invariants de la forme quadrilinéaire . . . . .</b>	<b>125</b>
<b>B Les formes normales de Chterental et Djokovic . . . . .</b>	<b>131</b>
<b>C Une bibliothèque PsTrick dédiée aux polytopes de réflexions complexes . . . . .</b>	<b>135</b>
<b>D Les puissances du discriminant . . . . .</b>	<b>145</b>





# Chapitre 1

## Introduction

Depuis ses origines, datées du milieu du dix-neuvième siècle<sup>(1)</sup>, la théorie des invariants n'a pas connu un développement linéaire. À ses débuts, cette discipline fut étudiée par les plus brillants mathématiciens de son époque : Brioschi, Boole (considéré comme son créateur), Cayley, Clebsch, Eisenstein, Gordan, Hermite, Hesse, Hilbert, Klein, Lindenmann, Lie, Meyer, Peano, Sylvester, Weber *etc.* avant de s'endormir progressivement jusque dans les années 50. Les raisons de cette désaffection se trouvent d'une part dans la complexité des calculs et d'autre part dans la difficulté d'analyser les résultats. Sous l'impulsion de la géométrie algébrique<sup>(2)</sup>, elle trouvera un nouveau souffle au milieu des années 1960<sup>(3)</sup> sous le nom de théorie géométrique des invariants. Cette vision lui donnera le cadre algébrique général pour l'interprétation de ses résultats. Plus récemment, les progrès de l'informatique ont permis de réaliser des calculs qui étaient réputés impossibles. En effet, les mathématiciens utilisaient un algorithme dû à Gordan combiné à la méthode symbolique de Clebsch. Cette méthode est un système d'écriture sophistiqué, s'appuyant sur un ensemble de règles de réduction des expressions, permettant de calculer des invariants et surtout de tester des dépendances linéaires et algébriques à la main. Elle est devenue progressivement inadaptée pour le traitement des cas de plus en plus complexes. De nos jours, l'algorithme de Gordan peut être facilement implémenté et la combinaison de techniques

---

<sup>(1)</sup>D'après Meyer [149].

<sup>(2)</sup>Voir [152, 177].

<sup>(3)</sup>Mumford publia la première édition de son ouvrage "*Geometric Invariant Theory*" en 1965.

récentes<sup>(4)</sup> et de méthodes classiques programmées sur des systèmes de calcul formel nous a permis d'étudier des systèmes qui étaient réputés hors de portée. L'utilisation surprenante de la théorie des invariants en informatique quantique lui a fourni le cadre applicatif qui lui manquait et contribue grandement à son développement.

Ce mémoire est consacré à un cas particulier de la théorie des invariants : l'étude des invariants des hypermatrices. Pour simplifier, les hypermatrices sont des tableaux ayant plusieurs indices. La problématique principale consiste à trouver un analogue multidimensionnel de la classification des matrices selon leur rang. La notion de rang se généralisant mal aux hypermatrices, nous pouvons reformuler le problème de la façon suivante : pour une matrice donnée décrire celles qui lui sont équivalentes par multiplication à droite et à gauche par une matrice de Gauss<sup>(5)</sup>. Un tel calcul nécessite la définition de forme normale. Dans le cas des matrices, il s'agit de la forme de Jordan. L'outil principal permettant de savoir si une matrice est de rang plein est le déterminant (qui est invariant par multiplication par une matrice de Gauss - à droite et à gauche). Dans le cas multi-dimensionnel, ce polynôme admet une multitude de généralisations : ce sont les invariants.

Ce document est divisé en deux parties. Dans la première, nous décrivons les méthodes générales de la théorie des invariants appliquées aux hypermatrices ainsi que le lien entre celle-ci et l'informatique quantique. Dans une série d'articles datant du début de la décennie, Klyachko<sup>(6)</sup> a montré qu'elle est au centre de la discussion sur la nature des systèmes de qubits (partie élémentaire de l'information au même titre que les bits pour l'informatique classique). En particulier, elle permet de décrire la notion d'intrication, phénomène par lequel les particules d'un système quantique sont liées et ne peuvent pas être considérées individuellement. Nous montrons comment des algorithmes issus de la théorie classique des invariants permettent d'obtenir des résultats dans ce domaine. En particulier, nous l'illustrons sur des systèmes de 2 à 5 particules intriqués. Nous montrons aussi les limites d'une approche calculatoire, en constant la complexité sur-exponentielle des algorithmes utilisés. Les résultats exposés dans cette partie reproduisent les articles [P4,P7,P11,P13,P14]. La seconde partie est consacrée à l'étude

---

<sup>(4)</sup>Par exemple, grâce à l'algorithme de Xin [207], nous pouvons calculer les dimensions de certaines algèbres d'invariants.

<sup>(5)</sup>Dont le déterminant est 1.

<sup>(6)</sup>Voir [101, 102].

d'un invariant particulier qui peut être considéré comme la généralisation la plus simple<sup>(7)</sup> du déterminant. Cet invariant est, comme le déterminant, une somme alternée sur plusieurs groupes symétriques. Nous l'appellerons *hyperdéterminant*. Nous examinons l'aspect combinatoire de cet objet sur différents exemples. En particulier, nous traitons le cas où les entrées de l'hypermatrice ne dépendent que de la somme des indices (*hyperdéterminant de Hankel*) [P12,P15]. Nous montrons que ce type d'hyperdéterminant est lié aux puissances paires du Vandermonde, à certaines intégrales itérées et aux polynômes de Jack. Nous abordons aussi le sujet des hypermatrices dont les entrées dépendent uniquement du pgcd des indices [P1] ainsi que celui des hypermatrices antisymétriques au travers de l'étude d'un autre polynôme : *l'hyperpfaffien* [P16].

---

<sup>(7)</sup>Pour deux raisons : il admet un développement très similaire comme une somme alternée et c'est l'invariant de plus bas degré pour les hypermatrices ayant un nombre pair d'indices.



Première partie

Invariants des formes  
multilinéaires et informatique  
quantique



# Chapitre 2

## Introduction

L'origine de la théorie des invariants est classiquement attribuée à George Boole [20] dans un article daté de 1841<sup>(1)</sup>. Le problème général des invariants sera énoncé en 1843 par Arthur Cayley reprenant une idée de l'article de Boole. Il consiste à trouver une base finie de l'algèbre des polynômes invariants dans le but d'automatiser le raisonnement géométrique. Cayley proposera quelques années plus tard, une solution dans le cas de deux variables (formes binaires appelées aussi « *quantics* ») [35] dans le second article d'une série de dix qu'il débuta en 1854 [34]<sup>(2)</sup>. Gordan [71] rédigea la première preuve de la finitude des bases d'invariants dans le cas des formes binaires en 1868. Sa preuve s'appuie sur un algorithme de construction des invariants utilisant le formalisme symbolique introduit par Aronhold et Clebsch (voir par exemple [40]). La méthode symbolique est un moyen de représenter les invariants de façon à pouvoir effectuer les calculs à la main. Elle est basée sur une méthode générale de construction de covariants nommée *transvection* due à Cayley[34, 35]. Les transvections sont des opérateurs différentiels fondamentaux dans l'algorithme de Gordan[71]. Une fois le cas des formes binaires résolu, Gordan essaya de résoudre le problème général mais ne démontra la propriété de finitude que dans des cas particuliers<sup>(3)</sup>. Hilbert, en 1890, fut le

---

<sup>(1)</sup>D'après Franz Meyer [149] et les références trouvées dans l'article [58].

<sup>(2)</sup>Cayley a commis une erreur dans ce papier en montrant qu'à partir d'un certain degré, les formes binaires possèdent des systèmes infinis d'invariants indépendants. Cette erreur fut corrigée par Gordan quelques années plus tard [71].

<sup>(3)</sup>Il s'intéressa notamment aux formes ternaires (par exemple dans [72]), il traite du cas des formes ternaires de degré trois.



premier à donner une preuve non constructive<sup>(4)</sup> de la finitude d'un ensemble générateur d'invariants pour une forme *naire* de degré quelconque [82] puis une preuve constructive en 1893 [83]. Malheureusement, la connaissance d'un algorithme de construction, ne permet de calculer un système complet de covariants que dans de rares cas. En effet, les calculs sont souvent si volumineux qu'ils rendent l'algorithme irréalisable et les résultats inexploitable. Dans ce mémoire nous ne traiterons que du cas des formes multilinéaires. Un système complet d'invariants n'est connu que pour les formes les plus simples. Si le cas de la forme binaire bilinéaire est trivial et est un cas particulier du système de formes binaires bi-linéaires traité par Peano [159], les covariants des formes binaires tri-linéaires n'ont été étudiés qu'en 1881 par l'astronome belge LePaige [124]. Le même auteur a débuté l'étude de la forme quadrilinéaire binaire la même année [125], mais ce n'est que récemment [23, 133] que nous avons donné un système complet de covariants. Seuls quelques invariants de la forme quintilinéaire sont connus [134]. La forme ternaire trilinéaire (dont le cas dégénéré de la forme cubique ternaire a été considéré par Gordan [72]) a été étudiée dans une série d'articles par Chanler et Thrall [37, 185, 186] et a fait l'objet d'investigations plus récentes mettant en jeu des propriétés des algèbres de Lie semi-simples graduées [153, 154, 199, 200]. Dans [24], nous avons présenté un système complet d'invariants et réalisé une classification des orbites en relation avec certains polytopes complexes [42]. La complexité des algèbres de covariants laisse penser que leur description complète par générateurs et relations restera à jamais hors de portée des systèmes de calculs les plus puissants. Or l'information pertinente est celle contenue dans la classification des orbites (ou plutôt de leurs adhérences) de la forme sous l'action des transformations linéaires. Cette classification peut être obtenue, en principe, en étudiant les variétés définies par l'annulation d'un ou plusieurs covariants. Cette stratégie est loin d'être satisfaisante. Dans les cas que nous avons considérés [23, 24, 133], nous avons constaté qu'un sous-ensemble de la base de covariants permet de distinguer les différents types d'orbites. La structure de Cohen-Macaulay<sup>(5)</sup> de l'anneau des covariants des formes binaires qui permet de distinguer certains générateurs appelés primaires [88]

---

<sup>(4)</sup>Une anecdote célèbre [58] rapporte que Gordan, irrité par l'aspect non constructif de la preuve, eut le propos suivant : « *Ce ne sont pas des mathématiques, mais de la théologie.* ». Quelques années plus tard, ayant simplifié la preuve de Hilbert, il admit que « *la théologie avait aussi ses avantages.* »

<sup>(5)</sup>Une algèbre de Cohen-Macaulay possède une structure de module libre sur une algèbre de polynôme (voir [53] par exemple).

semble plus accessible que sa description par résolution libre.

Si dans les années 1940, la théorie des invariants semblait avoir atteint ses limites, la théorie géométrique des invariants développée par David Mumford au début des années 1980 lui a donné un nouveau souffle. Dans ce contexte, l'ensemble des orbites d'un ensemble  $X$  pour l'action d'un groupe  $G$  est l'espace topologique quotient  $X//G$ . Dans le cas qui nous intéresse,  $X$  est l'espace des formes  $k$ -linéaires  $n$ -aires et  $G$  est le produit  $k$  groupes linéaires. Le fait que  $X$  soit une variété algébrique ne confère pas cette structure à  $X//G$  dans le cas général : il s'agit de la variété affine dont l'anneau des coordonnées <sup>(6)</sup> est l'anneau des polynômes invariants. Dans ce langage, le problème de la classification des orbites rejoint celui de l'étude du quotient de l'ensemble des points semi-stables <sup>(7)</sup> de l'espace projectif  $\mathbb{P}(X)$  par l'action du groupe  $G$  [201].

Plus récemment, l'émergence de l'informatique quantique, et en particulier l'étude de l'intrication des systèmes purs, a donné une nouvelle motivation à la théorie des invariants. Klyachko [101, 102] propose un dictionnaire permettant de traduire les définitions liées à l'information quantique dans le langage de la théorie géométrique des invariants. Ainsi, un système pur de  $k$ -qubits est une forme multilinéaire, l'espace de Hilbert est l'espace des hypermatrices, le groupe dynamique est le groupe des transformations unitaires et son complexifié celui des transformations linéaires, un état intriqué est un point semi-stable de l'espace de Hilbert, un état complètement intriqué est un état stable *etc.* D'après Klyachko [101, 102], c'est la classification des orbites sous l'action du complexifié du groupe dynamique qui permet d'obtenir une bonne définition de l'intrication. Nous avons suivi cette définition dans les articles [23, 24, 133, 134]. D'après Vidal [197] l'étude de l'action du groupe dynamique (qui est un produit de groupes spéciaux unitaires) permet de construire des mesures d'intrications, c'est à dire des polynômes invariants pour l'action de ce groupe. Dans [137], nous expliquons comment obtenir ces invariants à partir des covariants linéaires.

Dans le chapitre 3, nous explicitons le problème de l'intrication tel qu'il a été posé par Klyachko [101, 102] et nous l'illustrons par les exemples des 2 et 3-qubits (formes binaires bi et tri-linéaires). Nous introduisons en fin de chapitre les notions d'invariants et de covariants. Dans le chapitre 4, nous ex-

---

<sup>(6)</sup>Si  $X \subset \mathbb{C}^n$ , l'anneau de coordonnées  $A(X)$  est le quotient  $A(X) := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$  où  $I(X)$  est l'idéal des polynômes de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  s'annulant en tout point de  $X$ .

<sup>(7)</sup>Une orbite stable est une orbite qui ne contient pas 0. Les points semi-stables sont dans l'adhérence d'une orbite stable [98, 201].

pliquons comment appliquer les techniques de théorie classique des invariants aux formes multilinéaires. En particulier, nous décrivons la méthode permettant d'obtenir les séries de Hilbert et nous détaillons l'algorithme de Gordan adapté à ce cas précis. Nous illustrons ce paragraphe avec les exemples des formes binaires tri, quadri et quintilinéaires. Les résultats de ce chapitre sont tirés des articles [23, 133, 134]. Le chapitre 5 reprend les résultats de l'article [24], dans lequel nous décrivons l'espace des orbites d'une forme ternaire tri-linéaire. Enfin, dans le chapitre 6, nous abordons le sujet des invariants unitaires. Les résultats de ce dernier paragraphe se trouvent dans [137].

# Chapitre 3

## Polynômes invariants et états intriqués

### 3.1 Système dynamique quantique

L'évolution temporelle d'un système quantique  $A$  est décrite par une équation de Schrödinger. En mécanique quantique, on représente ses solutions sous la forme

$$\phi(t) = U(t)\phi(0)$$

où  $U(t)$  est un opérateur unitaire (appelé opérateur d'évolution) dépendant de l'Hamiltonien  $H_A$  du système. Les solutions de l'équation de Schrödinger forment un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_A$ . Chaque élément de cet espace est une combinaison linéaire d'états physiquement réalisables. C'est le fameux principe de superposition d'états qui implique l'expérience de pensée très contre-intuitive du chat de Schrödinger pouvant être ni complètement mort ni complètement vivant.

Le principe de superposition implique que l'espace de Hilbert associé à un système composé  $AB$  est le produit tensoriel des espaces de Hilbert de chacun des systèmes

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B.$$

Le paradoxe d' Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) [52], que nous détaillerons un peu plus loin, en est une conséquence surprenante.

Plus généralement, le principe de Von Neumann consiste à associer à un système  $A$  dit *quantique* un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  appelé *espace des états*.

Dans le cas qui nous intéresse, nous supposons que cet espace est de dimension finie.

Nous aurons besoin de quelques définitions. Un *état pur* est un vecteur unitaire  $\phi \in \mathcal{H}_A$ . Les physiciens considèrent ces états comme des projecteurs notés  $|\phi\rangle\langle\phi|$ , ce qui permet de les manipuler même lorsque l'on n'a pas accès directement à l'espace. À l'opposé, il y a les *états mixtes* (encore appelés matrices de densité) qui sont des sommes d'états purs

$$\rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|,$$

définissant un opérateur Hermitien non négatif de trace 1, les  $\|p_i\|^2$  étant à interpréter comme des probabilités. Les états purs sont des états mixtes spéciaux diagonalisables.

Un *observable* est un opérateur Hermitien  $X_A$  agissant sur  $\mathcal{H}_A$ . En mesurant l'observable  $X_A$  lorsque le système est dans l'état  $\rho$ , on obtient une valeur aléatoire dans le spectre de  $X_A$ . L'espérance de cette valeur dépend des  $p_i$  et des états purs qui composent  $\rho$ . La mesure détruit l'aspect quantique du système. L'état du système devient, alors, un des vecteurs propres de  $X_A$  puis reprend instantanément son évolution; on notera  $|\lambda\rangle$  le vecteur propre associé à la valeur  $\lambda$ . C'est une notation un peu ambiguë adoptée par les physiciens dans le but de confondre l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  avec l'espace engendré par les vecteurs propres.

Un *système dynamique quantique* dépend d'une algèbre de Lie  $\mathcal{L}$  d'opérateurs appelés *observables essentiels*. Le choix de cette algèbre de Lie est lié au type de mesure que l'on veut considérer. Le groupe correspondant  $G := \exp i\mathcal{L}$  est le *groupe symétrique dynamique* du système. Le système dynamique quantique est composé de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et d'une représentation unitaire du groupe dynamique  $G : \mathcal{H}$ . Les symétries d'un état sont données par son stabilisateur dans le groupe dynamique. D'après Klyachko [101], certaines symétries cachées se manifestent seulement si l'on considère l'action du complexifié  $G^c$  du groupe dynamique.

## 3.2 États purs intriqués

Dans ce document, nous ne traiterons que des états purs de systèmes composés.

Il est difficile, même dans ce contexte, de définir ce qu'est l'intrication. En fait, une grande partie du travail des physiciens consiste à rechercher la définition de ce phénomène.

Nous n'entrerons pas dans cette discussion mais nous baserons notre étude sur la suggestion de Klyachko [101, 102] qui propose de relier cette notion à des concepts issus de la théorie géométrique des invariants [152].

Nous utiliserons la caractérisation de Kempf-Ness [98] des *états complètement intriqués*. En fait, il s'agit d'un théorème de géométrie qui peut être traduit dans le langage de l'information quantique de la façon suivante [101].

**Théorème 1** (*Kempf-Ness*) *Un vecteur est complètement intriqué si et seulement si il est non nul et si il est de longueur minimale dans son orbite sous l'action de  $G^c$ . Un tel vecteur existe dans une orbite si et seulement si elle est fermée et dans ce cas ce vecteur est unique à une transformation de  $G$  près.*

Un état  $\phi$  est dit *intriqué* si et seulement si il peut être transformé en un état complètement intriqué  $\phi_0$  par action éventuellement asymptotique du groupe  $G^c$ , *i.e.*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g_i \phi = \phi_0$$

pour une séquence  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $G^c$ . Autrement dit, un état est intriqué si et seulement si l'adhérence de son orbite contient un élément complètement intriqué.

Cette notion coïncide avec la notion de *semi-stabilité* de la théorie géométrique des invariants. Un état appartenant à la même orbite qu'un état complètement intriqué est un état *stable*. Un état n'ayant pas un tel élément dans l'adhérence de son orbite est un élément *instable*.

Or les orbites fermés (donc stables, d'après le Théorème 1) ont la propriété d'être séparables de 0 par des polynômes invariants, *i.e.* une fonction est invariante pour l'action de  $G^c$  si elle est constante sur chacune des orbites. Il s'en suit la caractérisation suivante :

**Théorème 2** (*Klyachko*) *Un état est intriqué si et seulement si il est séparé de 0 par un polynôme  $G^c$  invariant.*

### 3.3 États purs et formes multilinéaires

Les systèmes que nous considérerons sont des systèmes composés  $A := A_1 A_2 \dots A_k$ . On supposera que l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{A_i}$  associé à chaque composante  $A_i$  est de dimension finie  $n_i$ . C'est à dire qu'il admet comme base  $n_i$  vecteurs que l'on notera  $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n_i - 1\rangle$ . L'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  associé à  $A$  est le produit tensoriel des espaces de Hilbert des composantes

$$\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_{A_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{A_k}$$

et est engendré par les vecteurs

$$|\lambda_1 \dots \lambda_k\rangle := |\lambda_1\rangle \otimes \dots \otimes |\lambda_k\rangle$$

où  $\lambda_i \in \{0, \dots, n_i - 1\}$ . Un état pur sera donc un tenseur à  $k$  composantes assimilable à une forme multilinéaire

$$|\phi\rangle := \sum \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_k} |\lambda_1 \dots \lambda_k\rangle \sim \sum \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_k} x_{\lambda_1} \dots z_{\lambda_k}$$

ou à un tableau multiindexé (appelé aussi *hypermatrice*)  $(\phi_{\lambda_1 \dots \lambda_k})_{0 \leq \lambda_i \leq n_i}$ .

Pour définir complètement le système dynamique, il faut donner le groupe dynamique ainsi que son action sur l'espace de Hilbert. Le groupe dynamique que l'on utilise est le groupe

$$G = SU(n_1, \mathbb{C}) \otimes \dots \otimes SU(n_k, \mathbb{C})$$

des transformations locales spéciales unitaires (LSUT dans la littérature).

Son complexifié est identifié par les physiciens au groupe des opérations stochastiques locales assistées par la communication classique (SLOCC) et est égal à un produit de groupes spéciaux linéaires

$$G^c = SL(n_1, \mathbb{C}) \otimes \dots \otimes SL(n_k, \mathbb{C}).$$

L'action de  $G$  (ou de  $G^c$ ) sur  $\mathcal{H}_A$  généralise le produit des matrices

$$(g^{(1)}, \dots, g^{(k)}) \cdot |\phi\rangle = \sum_{j_1, \dots, j_k} \sum_{i_1, \dots, i_k} g_{i_1, j_1}^{(1)} \dots g_{i_k, j_k}^{(k)} \phi_{j_1 \dots j_k} |i_1 \dots i_k\rangle. \quad (3.1)$$

Ainsi d'après le Théorème 2, le problème de la caractérisation des états intriqués de  $\mathcal{H}_A$  peut être résolu en décrivant l'algèbre des polynômes invariants des formes multilinéaires.

Lorsqu'un système a deux états réalisables (*i.e.* son espace de Hilbert est de dimension 2), on parle de *qubits* ou *bits quantiques*. Les deux états se notent  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ . Les qubits sont réalisables à partir d'électrons dont on mesure le moment cinétique de spin ou de photons dont on mesure la polarisation.

Lorsqu'un système possède trois états réalisables, on parle de *qutrits*. C'est le cas si on s'intéresse au moment cinétique de spin d'un photon. Au delà, on utilise le terme de *qudits*.

### 3.4 L'exemple des 2 qubits ; le paradoxe EPR

Considérons un système formé d'un seul qubit dans un état quantique pur. Avant d'être mesuré, il se trouve dans une superposition d'états

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

On peut assimiler les états purs à des vecteurs de  $\mathbb{C}^2$ ,

$$\begin{aligned} |0\rangle &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |1\rangle &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ |\phi\rangle &\sim \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Un argument similaire est valable pour un système constitué de deux particules ayant chacune deux états réalisables. Son espace de Hilbert est le produit de deux espaces de Hilbert de dimension 2 et possède donc quatre états de base  $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$ ,  $|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$ ,  $|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle$ ,  $|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$ . Les états purs sont de la forme

$$|\phi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle.$$

Ces objets sont des 2-*qubits* et appartiennent à un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 4 assimilable à l'espace des  $\mathbb{C}$ -matrices  $2 \times 2$ ,

$$\begin{aligned} |00\rangle &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ |01\rangle &\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
|10\rangle &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
|11\rangle &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
|\phi\rangle &\sim \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ce système est le coeur du paradoxe EPR [52]. En voici une description très simplifiée. En 1935, les trois physiciens proposèrent un modèle théorique prévoyant la non-localité de l'information comme un phénomène physique implémentable. Le principe est le suivant, on émet deux photons pouvant avoir deux angles de polarisation orthogonaux dans deux directions opposées. Les photons sont récupérés dans 4 capteurs (un par direction et par polarisation). On suppose que le système formé des deux photons est dans un état quantique pur. Si le système est dans un état factorisable

$$|F\rangle := (a_0|0\rangle + a_1|1\rangle)(b_0|0\rangle + b_1|1\rangle)$$

alors chaque photon peut être mesuré indépendamment. En revanche, si le système est dans un état non factorisable, comme par exemple

$$|W\rangle := |00\rangle + |11\rangle$$

la mesure de la polarisation de l'une des particules détruit la propriété quantique du système entier qui prend un des quatre états possibles (même si les particules sont très éloignées l'une de l'autre). Cela ne permet pas encore de conclure sur la non-localité de l'information, en effet on pourrait imaginer que la mesure déclenche un échange d'information via l'émission de particules messagères. Ce sont les inégalités de Bell (très délicates à tester expérimentalement) qui permettent d'éliminer cette éventualité. Le paradoxe provient du fait que les deux particules semblent communiquer à une vitesse supérieure à celle de la lumière. En fait de paradoxe, il s'agit plutôt d'une incompatibilité entre la mécanique relativiste et la mécanique quantique. Les premières expériences ont eu lieu à la fin des années 70 et la plus célèbre d'entre elles est sans doute celle d'Alain Aspect (lire [8] pour des informations plus précises sur les tests des inégalités de Bell et dans [81] le lecteur pourra trouver des renseignements sur l'information quantique).

Revenons à l'aspect mathématique. Le problème consiste à distinguer les états factorisables de ceux qui ne le sont pas. En utilisant la représentation

matricielle, on constate qu'il suffit de calculer le déterminant du système. En effet,

$$|F\rangle \sim \begin{pmatrix} a_0 b_0 & a_0 b_1 \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 \end{pmatrix} \text{ et } |W\rangle \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si le déterminant est nul alors le système factorise, si il est non nul, il est dans un état intriqué.

Mais ce raisonnement est faussement simple, nous allons voir dans l'exemple suivant (section 3.5) que l'intrication n'est pas le contraire de la factorisation. Le paramètre pertinent est l'orbite de l'état sous l'action du groupe dynamique (ou plutôt de son complexifié). Le groupe dynamique qui est considéré, est composé de deux copies du groupe spécial unitaire,

$$LSUT := SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C}).$$

Son complexifié est composé de deux copies du groupe spécial linéaire

$$SLOCC := SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}).$$

L'action de ces deux groupes sur l'espace des états purs est simplement le produit à gauche et à droite des matrices,

$$(g_1, g_2) \cdot |\phi\rangle := g_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \cdot {}^t g_2.$$

Ici, le calcul du déterminant permet de savoir si la matrice nulle est dans l'adhérence de l'orbite de la matrice que l'on considère.

L'algèbre des polynômes invariants est engendrée par  $\det$  et donc d'après le théorème 2, les états intriqués sont ceux pour lesquels ce polynôme ne s'annule pas. C'est à dire ceux qui sont assimilables à des matrices inversibles.

### 3.5 L'exemple des 3-qubits

Considérons maintenant l'espace de Hilbert des 3-qubits. Les états purs ont la forme

$$|\phi\rangle := \sum_{0 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 1} a_{i_1 i_2 i_3} |i_1 i_2 i_3\rangle.$$

Ces états sont assimilables à des tenseurs à trois indices  $(a_{i_1 i_2 i_3})_{0 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 1}$ .

Nous allons classifier les états intriqués sous l'action du groupe  $SLOCC$  formé de 3 copies du groupe spécial linéaire

$$SLOCC := SL_3(\mathbb{C}) \times SL_3(\mathbb{C}) \times SL_3(\mathbb{C}).$$

L'action de ce groupe sur les états purs est définie par (3.1).

On peut naïvement proposer la classification suivante

1. Les états complètement factorisés

$$(a_0|0\rangle + a_1|1\rangle) \otimes (b_0|0\rangle + b_1|1\rangle) \otimes (c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)$$

2. Les états partiellement factorisés

$$(a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle) \otimes (b_0|0\rangle + b_1|1\rangle)$$

3. Les états non-factorisables <sup>(1)</sup>

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$$

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$$

Cette classification ne correspond pas à la notion d'intrication. Si on applique la caractérisation de Klyachko (théorème 2), il faut d'abord rechercher tous les polynômes invariants puis caractériser les polynômes qui ne les annulent pas.

Il n'y a qu'un seul invariant pour les hypermatrices à trois indices de dimension 2 : l'hyperdéterminant de Cayley [31, 63]

$$\begin{aligned} \Delta = & (a_{000}^2 a_{111}^2 + a_{001}^2 a_{110}^2 + a_{010}^2 a_{101}^2 + a_{011}^2 a_{100}^2) \\ & - 2(a_{000} a_{001} a_{110} a_{111} + a_{000} a_{010} a_{101} a_{111} + a_{000} a_{011} a_{100} a_{111}) \\ & - 2(a_{001} a_{010} a_{101} a_{110} + a_{001} a_{011} a_{110} a_{100} + a_{010} a_{011} a_{101} a_{100}) \\ & + 4(a_{000} a_{011} a_{101} a_{110} + a_{001} a_{010} a_{100} a_{111}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Si on applique cet invariant à la classification que l'on a présentée plus haut, on trouve qu'il s'annule dans tous les cas sauf pour  $|GHZ\rangle$ . En conclusion, ni les états partiellement factorisés, ni  $|W\rangle$  ne sont intriqués! Ceci illustre le fait que la définition de l'intrication proposée par Klyachko n'est pas la

---

<sup>(1)</sup>L'état  $|GHZ\rangle$  doit son nom aux physiciens Greenberger, Horne et Zeilinger [75]. Voir aussi [49] pour une discussion sur l'intrication des systèmes de trois qubits.

négation de la factorisation. Comme dans le cas des systèmes de 2-qubits, la classification des états intriqués est simple, soit l'état est stable et dans ce cas il est dans l'orbite de  $|GHZ\rangle$  qui est maximalelement intriqué, soit il est instable et donc non intriqué.

Pour pouvoir distinguer  $|W\rangle$  et les états factorisés, il faut trouver des outils plus fins. Ici encore, la réponse se trouve dans la théorie classique des invariants. Pour obtenir une classification plus complète des orbites, il faut faire appel à l'algèbre des concomitants (voir section suivante 3.6) qui dans le cas des formes binaires se réduit à celle des covariants.

Un système complet de covariants est connu depuis la fin du XIX<sup>ième</sup> siècle. En 1881, C. Le Paige a donné la liste des covariants en utilisant la méthode des transvectants [124, 125]

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \sum_{i_1 i_2 i_3} a_{i_1 i_2 i_3} x_{i_1} y_{i_2} z_{i_3}, \\ H_x(\mathbf{x}) &= \det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial z_k} \right), \\ H_y(\mathbf{y}) &= \det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial z_k} \right), \\ H_z(\mathbf{z}) &= \det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j} \right), \\ T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H_x}{\partial x_1} & \frac{\partial H_x}{\partial x_2} \end{vmatrix}, \\ \Delta. \end{aligned}$$

On peut, de plus, noter une relation algébrique entre les générateurs ,

$$T^2 + \frac{1}{2} H_x H_y H_z + \Delta f^2 = 0. \quad (3.3)$$

Dans un article postérieur, C. Le Paige, a donné une liste de formes normales pour lesquelles il a évalué les différents covariants (voir aussi Schwartz [173])

Formes canoniques	$\Delta$	$H_x$	$H_y$	$H_z$	$T$
$F_1 = x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2 \sim  GHZ\rangle$	-1	$2x_1 x_2$	$2y_1 y_2$	$2z_1 z_2$	$x_1 y_1 z_1 - x_2 y_2 z_2$
$F_2 = x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1 \sim  W\rangle$	0	$-2x_1^2$	$-2y_1^2$	$-2z_1^2$	$2x_1 y_1 z_1$
$F_{3x} = x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1$	0	$-2x_1^2$	0	0	0
$F_{3y} = x_1 y_1 z_2 + x_2 y_1 z_1$	0	0	$-2y_1^2$	0	0
$F_{3z} = x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_2$	0	0	0	$-2z_1^2$	0
$F_4 = x_1 y_1 z_1$	0	0	0	0	0

Le système de covariants permet bien de distinguer  $|W\rangle$  et les états factorisés. Remarquons que dans le tableau ci-dessus,  $F_1$  et  $F_2$  représentent les états

non factorisables (assimilés respectivement à  $|GHZ\rangle$  et  $|W\rangle$ ), les formes  $F_{3x}$ ,  $F_{2y}$  et  $F_{2z}$  sont partiellement factorisables et, enfin  $F_4$  est complètement factorisable.

### 3.6 Invariants et covariants

Nous avons vu que la notion fondamentale permettant de classifier les états des systèmes quantiques purs est la notion de polynôme invariant (ou plus généralement concomitant) des formes multilinéaires.

Les concomitants des formes multilinéaires (ou hypermatrices) ont fait l'objet de nombreux travaux jusque dans les années 40 (citons par exemple [37, 50, 65, 66, 85, 86, 87, 90, 148, 125, 126, 159, 168, 173, 186, 187, 188, 189, 190, 191]).

Les hypermatrices sont simplement des tableaux dont les éléments sont indexés par plus de deux indices. Plus formellement, il s'agit des composantes des éléments de l'espace  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ , où  $V_1, \dots, V_k$  sont des espaces vectoriels. L'entier  $k$  est le nombre d'indices de l'hypermatrice et chacun des indices est pris entre 1 et la dimension de l'espace  $V_i$  correspondant. Pour simplifier, nous considérerons que les espaces ont tous la même dimension  $n$  (on peut adapter le raisonnement facilement au cas général) et nous poserons  $V_i = \mathbb{C}^n$  pour tout  $i$ .

Une hypermatrice  $A = (a_{i_1 \dots i_k}) \in (\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$  est identifiable à la *forme fondamentale* comme étant le polynôme multilinéaire

$$f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1 \dots i_k} x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}$$

où  $\mathbf{x}_i := \begin{pmatrix} x_i^1 \\ \vdots \\ x_i^n \end{pmatrix}$ . Nous allons nous intéresser à l'action du groupe

$$G = GL(\mathbb{C}^n) \otimes \cdots \otimes GL(\mathbb{C}^n)$$

Un invariant relatif de degré  $d$  et de poids  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)$  est un polynôme  $F \in \mathcal{R}_d = S^d(V)^{\otimes k}$  en les entrées de l'hypermatrice tel que pour tout  $g = (g_1, \dots, g_k) \in G$ , on ait

$$F(g \cdot A) = \det(g_1)^{\omega_1} \cdots \det(g_k)^{\omega_k} F(A).$$

L'exemple le plus simple d'invariant est le déterminant des matrices usuelles. On peut étendre cette définition de façon naturelle aux hypermatrices ayant un nombre pair d'indices [31, 180, 181]

$$\text{Det}(A) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_{2k} \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(\sigma_1 \cdots \sigma_{2k}) \prod_{i=1}^p A_{\sigma_1(i) \cdots \sigma_{2k}(i)},$$

Un covariant de degré  $d = (d_0, d_1, \dots, d_k)$  est un invariant relatif dans  $\mathcal{R}_d = S^{d_0}(V^{\otimes k}) \otimes S^{d_1}(V^*) \otimes \cdots \otimes S^{d_k}(V^*)$ . Dans un langage plus moderne, c'est une application  $G$ -équivariante  $S^{d_0}(V) \rightarrow S^{d_1}(V) \otimes \cdots \otimes S^{d_k}(V)$ . Lorsque l'on considèrera l'aspect calculatoire du problème, les covariants seront des polynômes  $P(A; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ , en les entrées  $A_{i_1 \dots i_k}$  du tenseur et en les variables auxiliaires, invariants pour l'action simultanée du groupe  $G$  sur l'hypermatrice  $A$  et sur les vecteurs  $\mathbf{x}_i$ , définie par

$$(g_1, \dots, g_k) \cdot (A; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = ((g_1, \dots, g_k) \cdot A; g_1^{-1} \mathbf{x}_1, \dots, g_k^{-1} \mathbf{x}_k). \quad (3.4)$$

L'exemple le plus simple de covariant est la forme fondamentale.

On notera  $\text{Inv}(d, \omega)$  l'algèbre des invariants de degré  $d$  et de poids  $\omega$  et  $\text{Cov}(d, \omega)$  celle des covariants.



# Chapitre 4

## Formes binaires multilinéaires

### 4.1 Introduction

La théorie des invariants des hypermatrices (ou formes multilinéaires)<sup>(1)</sup> consiste en l'étude du problème suivant : Étant donné un ensemble fini d'espaces vectoriels  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , étudier les orbites du groupe  $SLOCC := GL(V_1) \otimes GL(V_2) \otimes \dots \otimes GL(V_k)$  dans l'espace  $\mathcal{H} = V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ . Les hypermatrices sont simplement les éléments de l'espace  $\mathcal{H}$ . Nous ne traiterons que le cas des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels. Le problème de la classification des hypermatrices n'a été résolu que dans quelques rares cas. Ce problème a été étudié dans le cadre de la théorie classique des invariants jusque dans les années 40 (par exemple dans [31, 37, 50, 85, 86, 87, 158, 123, 124, 125, 126, 129, 172, 174, 173, 186, 185]) puis a été provisoirement abandonné à cause des calculs trop volumineux qu'il nécessitait. Il a été reconsidéré récemment, motivé par les progrès de l'informatique et par les applications potentielles en information quantique [25, 26, 101, 151]. Le cas  $k = 2$  est familier et est équivalent au problème de la classification des matrices selon leur rang. Le cas des formes trilinéaires ( $k = 3$ ) a été peu étudié. La forme binaire trilinéaire ( $V_i = \mathbb{C}^2$  pour tout  $i$ ) a été abordée par Le Paige en 1881 [124] puis sous une forme plus précise par Schwartz [173] et Saddler [168]. Ce résultat est reproduit dans le livre de Sokolov [180]. Le cas de la forme  $3 \times 2 \times 2$  ( $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ ) n'a été abordé que tardivement [151] tandis que l'étude de la forme ternaire trilinéaire ( $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ ) a débuté dans les années 30 [37, 186, 185]. On connaît peu de chose sur les formes quadrilinéaires ( $k = 4$ ). En effet, seules

---

<sup>(1)</sup>On trouve aussi le terme de *polyadic* dans la littérature [86].



les formes binaires quadrilinéaires ont été considérées et apparaissent pour la première fois dans une étude partielle de Le Paige [126]. Quelques papiers ont traité de cas dégénérés. Citons par exemple l'étude de la forme cubico-linéaire  $(3, 1)$  par Todd [187]<sup>(2)</sup>, la forme double binaire  $(2, 2)$  par Turnbull [189, 190, 191] et la forme quadratico-bilinéaire  $(2, 1, 1)$  par Gilham [67, 68]. La classification des orbites n'a été trouvée que récemment par Verstraete et al. [195] (corrigée et complétée par Chterental et Djokovic [39]) en exploitant les propriétés de l'isomorphisme local  $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \sim SO_4(\mathbb{C})$ . La géométrie des orbites a été étudiée dans [204].

Afin d'obtenir une classification des orbites, il est souvent nécessaire de calculer des invariants, covariants et autres concomitants des hypermatrices. En effet, ce résultat permet d'obtenir des équations algébriques décrivant l'adhérence des orbites. Malheureusement, il s'agit d'une tâche ardue (voire irréalisable dans la plupart des cas) et un système complet de concomitants n'est connu que dans de rares exceptions. Pour ce qui est des formes binaires multilinéaires, un ensemble complet de générateurs de l'algèbre des covariants n'est connu que pour  $k \leq 4$ . Les covariants de la forme binaire bilinéaire sont engendrés par deux polynômes : la forme elle-même et le déterminant <sup>(3)</sup>. Les systèmes complets de concomitants pour des systèmes formés d'un nombre quelconque de formes binaires bilinéaires ont été décrits par Peano [159]. Les covariants des formes binaires trilinéaires sont connus depuis Le Paige [124, 125] et présentés dans le paragraphe 4.2.3. L'étude des covariants de la forme binaire quadrilinéaire a été commencée par Le Paige [126] mais un système complet de covariants n'est connu que depuis [23], ce résultat est reproduit dans ce mémoire à la section 4.4. Il est à noter que, bien qu'un système complet ait été exhibé, la description complète de l'algèbre des covariants par générateurs et relations reste inaccessible. Seule la série de Hilbert de l'algèbre de invariants de la forme quintilinéaire ainsi que quelques covariants sont connus [134].

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la section 4.2, nous décrivons les techniques permettant d'obtenir les séries de Hilbert de l'algèbre des invariants et de celles des covariants. Dans la section 4.3, nous étudions l'algorithme permettant d'obtenir un système complet de covariants. Enfin, nous illustrons ces méthodes sur les exemples de la forme binaire quadrili-

<sup>(2)</sup>La forme quartico-linéaire  $(4, 1)$  est étudiée dans [188].

<sup>(3)</sup>Bien qu'il s'agisse de la plus simple des formes binaires multilinéaires, elle donne lieu à des interprétations reliées, par exemple, à l'équation d'un cercle dans un système de coordonnées tetracycliques [41, 89].

néaire (section 4.4) et quintilinéaire (section 4.5). Les résultats de ce chapitre reproduisent ceux contenus dans les articles [133, 23] et [134].

## 4.2 Séries de Hilbert

### 4.2.1 Dimension des espaces

Dans ce chapitre, nous utilisons les propriétés des fonctions symétriques [138, 112]. En particulier, nous utilisons les notations de [112] pour les fonctions de Schur  $S_\lambda$ , les fonctions élémentaires  $\Lambda_n$ , les sommes de puissances  $\Psi_n$ . L'algèbre des fonctions symétriques sera notée  $Sym$ .

Les fonctions de Schur spécialisées à l'alphabet  $\{x_1, \dots, x_n\}$  sont les caractères des représentations polynomiales irréductibles de  $GL_n(\mathbb{C})$ .

Les représentations irréductibles de  $G := GL_n(\mathbb{C})^k$  ont donc pour caractère des produits de fonctions de Schur  $S_{\lambda^1}(X_1) \cdots S_{\lambda^k}(X_k)$  où les  $\lambda^i$  sont des partitions et les  $X_i$  des alphabets finis distincts de taille  $n$ . Dans notre cas, nous nous intéressons à la représentation de  $G$  à une dimension définie par

$$\det(g)^\omega = \det(g_1)^{\omega_1} \cdots \det(g_k)^{\omega_k}$$

pour  $g = (g_1, \dots, g_k) \in G$  (voir section 3.6) et qui a pour caractère le produit de fonctions de Schur rectangulaires

$$S_{(\omega_1^n)}(X_1) S_{(\omega_2^n)}(X_2) \cdots S_{(\omega_k^n)}(X_k). \quad (4.1)$$

Le caractère de  $G$  dans  $\mathcal{S}^d(\mathcal{V})$  étant  $S_d(X_1 \cdots X_k)$ , la dimension de l'espace des invariants peut être obtenue en calculant le produit scalaire

$$\dim \text{Inv}(d, \omega) = \langle S_d(X_1 X_2 \cdots X_k), S_{(\omega_1^n)}(X_1) S_{(\omega_2^n)}(X_2) \cdots S_{(\omega_k^n)}(X_k) \rangle_G. \quad (4.2)$$

En identifiant le produit sur différents alphabets à un produit tensoriel, cette égalité peut être réécrite en

$$\begin{aligned} \dim \text{Inv}(d, \omega) &= \langle \delta^k(S_d), S_{(\omega_1^n)} \otimes \cdots \otimes S_{(\omega_k^n)} \rangle_{Sym^{\otimes k}} \\ &= \langle S_d, S_{(\omega_1^n)} * \cdots * S_{(\omega_k^n)} \rangle_{Sym}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

où  $\delta$  est le coproduit usuel sur les fonctions symétriques et  $*$  le produit intérieur de  $Sym$  [138, 112]. Si les fonctions ne sont pas toutes du même degré, le produit intérieur est nul. Ceci implique

$$n\omega_1 = n\omega_2 = \cdots = n\omega_k = d. \quad (4.4)$$

De la même façon, on obtient

$$\begin{aligned} \dim \text{Cov}(d; \omega) &= \langle S_{d_0}(X_1 X_2 \cdots X_k), (S_{(\omega_1^n)} S_{d_1})(X_1) \cdots (S_{(\omega_k^n)} S_{d_k})(X_1) \rangle_G \\ &= \langle S_{d_0}, (S_{(\omega_1^n)} S_{d_1}) * \cdots * (S_{(\omega_k^n)} S_{d_k}) \rangle_{\text{Sym}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

#### 4.2.2 Séries de Hilbert en terme d'opérateurs Omega de Macmahon

Les séries de Hilbert des algèbres d'invariants et de covariants s'expriment comme des résidus. C'est un résultat classique dont nous donnons ci-dessous une preuve utilisant les fonctions symétriques.

Considérons l'opérateur

$$D_{\Phi_n} = n \frac{\partial}{\partial \Phi_n}, \quad (4.6)$$

prenant en paramètre une somme de puissance  $\Phi_n$ . On peut étendre cette définition par linéarité aux autres fonctions symétriques. Ainsi la série génératrice de ces opérateurs indexés par les fonctions élémentaires est

$$D_{\lambda_t} := \sum_n D_{\Lambda_n} t^n = \exp \left\{ - \sum (-t)^n \frac{\partial}{\partial \Phi_m} \right\} \quad (4.7)$$

si

$$\lambda_t = \sum \Lambda_n t^n$$

est la fonction génératrice des fonctions symétriques élémentaires (voir [112] pour les notations). Cet opérateur permet de définir l'opérateur vertex [114]

$$\Gamma_z = \sigma_z D_{\lambda_{-\frac{1}{z}}}$$

où

$$\sigma_z(\mathbb{X}) := \prod_{x \in \mathbb{X}} \frac{1}{1 - xz} = \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} z^n \frac{\Phi_m}{m} \right\}$$

est le produit de Cauchy (voir [112] pour les notations).

Toute fonction symétrique  $f$  sur l'alphabet  $\mathbb{X}$  peut être considérée comme une fonction des sommes de puissances sur le même alphabet  $f(\mathbb{X}) = f(\Phi_1, \Phi_2, \dots)$ . D'après sa définition, l'opérateur  $D_{\lambda_t}$  agit en décalant les sommes de puissances

$$D_{\lambda_t} f(\Phi_1, \Phi_2, \dots) = f(\Phi_1 + t, \Phi_2 - t^2, \dots).$$

Le facteur de droite de l'opérateur vertex  $\Gamma_z$  peut donc s'interpréter comme un décalage sur l'alphabet  $\mathbb{X}$

$$D_{\lambda_{-\frac{1}{z}}} f(\mathbb{X}) = f(\Phi_1 - \frac{1}{z}, \Phi_2 - \frac{1}{z^2}, \dots) = f(\mathbb{X} - \frac{1}{z}).$$

La définition des fonctions de Schur peut s'étendre aux compositions avec parts négatives [112]

$$S_\lambda = \begin{vmatrix} S_{\lambda_1} & S_{\lambda_1+1} & \cdots & S_{\lambda_1+n-1} \\ S_{\lambda_2-1} & S_{\lambda_2} & \cdots & S_{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{\lambda_n-n+1} & S_{\lambda_n-n+1} & \cdots & S_{\lambda_n} \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

où  $S_j = 0$  si  $j < 0$ .

En utilisant un développement de (4.8) par rapport à la première ligne, la série génératrice des fonctions de Schur de forme  $(n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  où  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est fixée et  $n$  parcourt  $\mathbb{Z}$  est

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n S_{n\lambda} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \leq 0} z^{n+k} S_{n+k} \left( \frac{-1}{z} \right)^k S_{\lambda/(1^k)} \quad (4.9)$$

où  $S_{\lambda/\mu} = \det(S_{\lambda_i - \mu_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq m}$  est une fonction de Schur gauche [138, 112].

Or  $D_f$  est l'adjoint de la multiplication pour le produit scalaire usuel des fonctions symétriques (en exercice dans [138] par exemple). Ceci implique  $D_{S_\mu} S_\lambda = S_{\lambda/\mu}$ . Après quelques simplifications dans (4.9), on obtient alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n S_{n\lambda} = \Gamma_z S_\lambda. \quad (4.10)$$

En appliquant (4.10), on trouve que la série génératrice des fonctions de Schur à deux parts dont la première peut être négative est

$$\sum_{\substack{\lambda_1 \in \mathbb{Z} \\ \lambda_2 \in \mathbb{N}}} u^{\lambda_1} v^{\lambda_2} S_{\lambda_1 \lambda_2} = (1 - \frac{v}{u}) \sigma_1((u+v)X). \quad (4.11)$$

De la même façon, la série génératrice des fonctions de Schur à trois parts dont les deux premières peuvent être négatives est

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}} x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} z^{\lambda_3} S_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = (1 - \frac{y}{x})(1 - \frac{z}{x})(1 - \frac{z}{y}) \sigma_1((x+y+z)\mathbb{X}) \quad (4.12)$$

Et plus généralement, si  $\mathbb{Y} = \{y_1, \dots, y_n\}$  est un alphabet commutatif, on a

$$\sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{Z} \\ \lambda_n \in \mathbb{N}}} y_1^{\lambda_1} \cdots y_n^{\lambda_n} S_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = \prod_i \frac{1}{y_i^{n-i}} \Delta(Y) \sigma_1(\mathbb{Y}\mathbb{X}). \quad (4.13)$$

Les outils que l'on vient de décrire vont nous permettre de calculer les séries de Hilbert des algèbres de covariants.

En effet, d'après (4.5), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \sum_{d, \omega} \dim \text{Cov}(d, \omega) t^{d_0} u_1^{d_1} \cdots u_k^{d_k} v_1^{\omega_1} \cdots v_k^{\omega_k} \\ &= \langle \sigma_1[tu_1 S_1 + t^2 v_1 S_{11}], \sigma_1[u_2 S_1 + v_2 S_{11}] \cdots \sigma_1[u_k S_1 + v_k S_{11}] \rangle, \end{aligned}$$

où le crochet  $[\ ]$  désigne le plethysme (voir [138]). Or sur deux variables, on a

$$\sigma_1[v S_{11}] = \sum_{l \geq 0} v^l S_l,$$

et

$$\sigma_1[u S_1 + v S_{11}] = \sum_{l(\lambda) \leq 2} u^{\lambda_1 - \lambda_2} v^{\lambda_2} S_\lambda.$$

Cette dernière somme peut être obtenue en combinant des opérateurs vertex  $\Gamma_x$  et l'opérateur  $\Omega_{\geq}^u$  de Macmahon [139], qui envoie les monômes contenant une puissance négative de  $u$  sur 0 et laisse inchangés les autres. En effet,

$$\sum_{\substack{\lambda_1 \in \mathbb{Z} \\ \lambda_2 \geq 0}} t^{|\lambda|} u^{\lambda_1 - \lambda_2} v^{\lambda_2} S_\lambda = \Gamma_{tu} \Gamma_{tv/u} 1 = \left(1 - \frac{v}{u^2}\right) \sigma_t \left[ \left(u + \frac{v}{u}\right) \mathbb{X} \right]. \quad (4.14)$$

Il en découle

$$\mathcal{C}_k(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Omega_{\geq}^{\mathbf{u}} \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{v_i}{u_i^2}\right) \sigma_t \left[ \prod_{i=1}^k \left(u_i + \frac{v_i}{u_i}\right) \right]. \quad (4.15)$$

La série de Hilbert de l'algèbre des invariants s'obtient en posant  $u_i = 0$  dans (4.15) après avoir appliqué l'opérateur de Macmahon. Ou, dit autrement, en calculant le terme constant

$$\mathcal{I}_k(t) := \sum_n \dim \text{Inv}(d) t^d = \text{CT}_{\mathbf{u}} \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{u_i^2}\right) \sigma_t \left[ \prod_{i=1}^k \left(u_i + \frac{1}{u_i}\right) \right]. \quad (4.16)$$

### 4.2.3 Exemple : Les formes binaires trilinéaires

Une fois calculées, les séries de Hilbert vont nous guider dans le calcul d'un système complet de covariants. Nous allons illustrer ce principe en reprenant l'exemple des 3-qubits. Si on applique (4.16), on trouve

$$\mathcal{I}_3(t) = \frac{1}{1 - t^4}$$

sans ambiguïté, cela signifie que l'algèbre des invariants est engendrée par un seul polynôme de degré 4 : l'invariant  $\Delta$  calculé à la section 3.5 (3.2).

Si on applique (4.15), on trouve, en posant  $v_i = 1$  pour simplifier l'expression

$$\mathcal{C}_k(t; (u_1, u_2, u_3), (1, 1, 1)) = \frac{1 - t^6 u_1^2 u_2^2 u_3^2}{(1 - t u_1 u_2 u_3)(1 - t^2 u_1^2)(1 - t^2 u_2^2)(1 - t^2 u_3^2)(1 - t^3 u_1 u_2 u_3)(1 - t^4)}. \quad (4.17)$$

Ceci suggère que l'algèbre est engendrée par 6 polynômes. Les générateurs apparaissent au dénominateur. Par exemple le facteur  $(1 - t u_1 u_2 u_3)$  représente un polynôme de degré 1 en les entrées de l'hypermatrice et de degré 1 dans chacune des variables auxiliaires. Il s'agit de la forme fondamentale  $f$ . Les facteurs  $(1 - t^2 u_1^2)$ ,  $(1 - t^2 u_2^2)$  et  $(1 - t^2 u_3^2)$  correspondent chacun à un polynôme de degré 2 en les entrées de l'hypermatrice et de degré 2 en les variables respectives  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$ . Les résultats de la section 3.5 permettent de supposer qu'il s'agit des covariants  $H_x$ ,  $H_y$  et  $H_z$ . Le facteur  $1 - t^3 u_1 u_2 u_3$  représente le covariant  $T$  qui est de degré 3 en les entrées et 1 en chacune des variables auxiliaires. Enfin,  $1 - t^4$  représente un invariant de degré 4 ( $\Delta$ ). Le numérateur peut être interprété comme une relation algébrique (syzygie) de degré 6 en les entrées et  $(2, 2, 2)$  en les variables auxiliaires. Encore une fois, cette relation est donnée dans la section 3.5 (équation (3.3)). Bien sûr, la simple donnée de (4.17) ne constitue pas une preuve. En effet, en multipliant en haut et en bas par un facteur du type  $1 - t^a u_1^b u_2^c u_3^d$ , on peut donner une autre interprétation faisant apparaître un autre générateur. Le numérateur sera alors interprété par l'existence de syzygies de différents ordres (les relations entre les générateurs apparaissent avec un coefficient négatif, les relations entre les relations, avec un coefficient positif *etc.*). En fait, connaissant la forme (4.17) de la série de Hilbert, il suffit de prouver qu'il n'existe pas d'autres relations que celles engendrées par (3.3). On peut trouver ces calculs dans [124].

### 4.3 Calcul des covariants

Les transvectants sont les outils de base pour la construction de systèmes complets de covariants et jouent un rôle fondamental dans la preuve par Gordan et Hilbert que les anneaux d'invariants admettent des systèmes finis de générateurs. Le calcul des transvectants est basé sur l'utilisation de l'opérateur  $\Omega$  de Cayley. Cette notion, initialement définie pour les formes binaires s'étend naturellement aux formes multibinaires.

L'opérateur  $\Omega$  de Cayley est

$$\Omega_{\mathbf{xy}} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial y_2} \end{array} \right|. \quad (4.18)$$

Le produit de deux formes  $f(\mathbf{x})$  et  $g(\mathbf{y})$  peut être identifié au produit tensoriel  $f(\mathbf{x}) \otimes g(\mathbf{y})$ . Si nous définissons l'application trace  $\text{tr} : f \otimes g \rightarrow fg$ , nous pouvons alors écrire  $\text{tr}(f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$ .

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $k$  variables binaires  $\mathbf{x}^i$  ( $i = 1 \dots k$ ), on définit pour tout  $k$ -uplet  $(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k$  le transvectant multiple de  $f$  par  $g$  :

$$(f, g)^{i_1 i_2 \dots i_k} = \text{tr} \Omega_{\mathbf{x}^1 \mathbf{y}^1}^{i_1} \Omega_{\mathbf{x}^2 \mathbf{y}^2}^{i_2} \dots \Omega_{\mathbf{x}^k \mathbf{y}^k}^{i_k} f(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k) g(\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^k), \quad (4.19)$$

On montre que l'on peut construire un système complet de covariants en appliquant un nombre fini de transvections à partir de la forme fondamentale. C'est le principe de l'algorithme de Gordan adapté aux formes binaires multilinéaires [188]. Pour des raisons pratiques de programmation, nous avons choisi d'utiliser plutôt la méthode de Peano [159] qui consiste à fabriquer les covariants de degrés  $d$  en utilisant des transvectants du type  $(f, C_{d-1})^{i_1, \dots, i_k}$  où  $C_{d-1}$  est un covariant de degré  $d-1$  en les éléments de l'hypermatrice. Dans le cas des formes multilinéaires, on peut se restreindre aux  $C_{d-1}$  irréductibles (qui ne sont pas des combinaisons algébriques de covariants de degrés inférieurs).

Pour résumer, on peut, en principe, obtenir un système complet de covariants pour une forme binaire multilinéaire en exécutant l'algorithme suivant.

1. La forme fondamentale  $f$  est le covariant de plus petit degré ( $d = 1$ ) ; le point de départ de l'algorithme consiste à le placer dans le système complet  $\mathcal{S}$  que l'on est en train de construire et de calculer les générateurs de degré  $d = 2$ .

2. Pour obtenir les générateurs de degré  $d$ , on calcule tous les transvectants de la forme  $(f, C)^{i_1, \dots, i_k}$  où  $C \in \mathcal{S}$  est un des générateurs de degré  $d-1$  précédemment calculés. On obtient un ensemble de générateurs dont on extrait un sous ensemble  $\mathcal{R}_d$  linéairement indépendant.
3. On considère un sous ensemble  $\mathcal{S}_d$  maximal de  $\mathcal{R}_d$  dont les éléments ne sont pas une combinaison algébrique d'éléments de  $\mathcal{S}$ . On insère les éléments de  $\mathcal{S}_d$  dans  $\mathcal{S}$ .
4. Si  $\mathcal{S}_d$  est vide, alors on arrête l'algorithme, l'ensemble  $\mathcal{S}$  obtenu est un système complet de covariants. Si  $\mathcal{S}_d$  n'est pas vide, on pose  $d = d + 1$  et on recommence à l'étape 2.

Bien que l'arrêt de l'algorithme soit garanti par le théorème de Gordan et Hilbert, il est très long à exécuter et nécessite un espace mémoire volumineux pour stocker les calculs intermédiaires. Il existe néanmoins plusieurs stratégies permettant d'accélérer le processus et de diminuer le stockage d'information. La plus simple consiste à s'aider de la série de Hilbert. On construit directement  $\mathcal{S}_d$  à l'étape 2, en testant les dépendances algébriques au fur et à mesure que l'on construit l'ensemble et on s'arrête lorsque l'on a le nombre exact de candidats dans chaque multi-degré.

Lorsque l'on connaît une forme normale pour une hypermatrice en position générale (c'est le cas pour les systèmes de 4-qubits par exemple[195]), on peut faire le calcul à partir de cette forme normale, ce qui permet de stocker des polynômes moins gros. Si on ne connaît pas de forme normale, on peut tout de même éviter de stocker les polynômes en entier. En effet, la *source*, c'est à dire le coefficient obtenu en posant  $x_0 = 1$  et  $x_1 = 0$  pour chaque variable binaire auxiliaire  $\mathbf{x} = \{x_0, x_1\}$ , permet de reconstituer le covariant complet. Dans [84] et [148], il est montré que le calcul des transvectants peut être effectué au niveau des sources.

Les covariants de degré  $d$  en les entrées et de multi-degrés  $\mu$  dans les variables auxiliaires peuvent être considérés comme des applications  $G$ -équivariantes  $S^d(V) \rightarrow S^{\mu_1}(V) \otimes \dots \otimes S^{\mu_k}(V)$ . Une telle application est déterminée par la donnée de l'image d'un vecteur de plus haut poids. Les covariants et les vecteurs de plus haut poids dans  $S^d(V)$  sont en bijection. Ces derniers sont aussi appelés *semi-invariants* dans [155] et sont les sources des covariants.



## 4.4 Covariants des formes binaires quadrilinéaires

### 4.4.1 La série de Hilbert

D'après (4.15), la série de Hilbert de l'algèbre des covariants est

$$\mathcal{C}_4(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Omega_{\geq}^{\mathbf{u}} \frac{(1 - \frac{v_1}{u_1^2}) \cdots (1 - \frac{v_4}{u_4^2})}{(1 - u_1 u_2 u_3 u_4 t) (1 - \frac{v_1 u_2 u_3 u_4}{u_1} t) (1 - \frac{u_1 v_2 u_3 u_4}{u_2} t) \cdots (1 - \frac{v_1 v_2 v_3 v_4}{u_1 u_2 u_3 u_4} t)}.$$

En décomposant successivement en fractions élémentaires (par rapport à  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ ) à l'aide d'un système de calcul formel, nous pouvons calculer cette série. Son numérateur étant trop volumineux pour être donné ici, nous poserons  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u$  et  $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 1$ . Après simplification, on obtient

$$\mathcal{C}_k(t; (u, u, u, u), (1, 1, 1, 1)) = \frac{P}{Q} \quad (4.20)$$

où le numérateur  $P$  est le polynôme

$$\begin{aligned} P = & 1 - u^2 t + (3u^4 - 2u^2) t^2 + (u^6 + 4u^4) t^3 \\ & + (10u^4 - u^2) t^4 + (-4u^8 - 2u^6 + 2u^4) t^5 \\ & + (2u^{10} + 6u^8 - 2u^6 + 8u^4) t^6 + (2u^{10} + 6u^8) t^7 \\ & + (-8u^{12} + u^{10} + 13u^8 - 2u^6 + 4u^4) t^8 \\ & + (-8u^{12} - u^{10} + 12u^8 - u^6) t^9 \\ & + (2u^{14} - 13u^{12} + 13u^8 - 2u^6) t^{10} \\ & + (u^{14} - 12u^{12} + u^{10} + 8u^8) t^{11} \\ & + (-4u^{16} + 2u^{14} - 13u^{12} - u^{10} + 8u^8) t^{12} \\ & + (-6u^{12} - 2u^{10}) t^{13} + (-8u^{16} + 2u^{14} - 6u^{12} - 2u^{10}) t^{14} \\ & + (-2u^{16} + 2u^{14} + 4u^{12}) t^{15} + (u^{18} - 10u^{16}) t^{16} \\ & + (-4u^{16} - u^{14}) t^{17} + (2u^{18} - 3u^{16}) t^{18} + u^{18} t^{19} - u^{20} t^{20} \end{aligned}$$

et le dénominateur est

$$\begin{aligned} Q = & (1 - tu^2)(1 - tu^4)(1 - t^2)(1 - t^2 u^2)^2 (1 - t^2 u^4)^3 (1 - t^4)(1 - t^4 u^2) \\ & \times (1 - t^4 u^4)(1 - t^6). \end{aligned}$$

C'est une algèbre de type Cohen-Macaulay (*c.f.* [177]). Ceci signifie qu'il s'agit d'une module libre de rang fini sur une sous algèbre engendrée par un nombre fini d'éléments homogènes  $f_1, \dots, f_m$ . L'entier  $m$  est la dimension

de Krull de l'algèbre des covariants (le nombre maximal d'éléments algébriquement indépendants). Comme la série  $\mathcal{C}_k(t; (t, t, t, t), (1, 1, 1, 1))$  a un pôle d'ordre 12 en  $t = 1$ , on en déduit que la dimension de Krull est  $m = 12$ .

Si on pose  $u = 0$  dans (4.20), on trouve la série de Hilbert de l'algèbre des invariants,

$$\mathcal{I}_4(t) = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^4)^2(1-t^6)}. \quad (4.21)$$

Cette formule montre que la conjecture 2.6.5.3 de [101] ne peut pas être correcte puisqu'elle prévoit que l'hyperdéterminant (de degré 24) fait partie des générateurs. Nous allons voir que cette algèbre est libre et engendrée par des éléments de degrés 2, 4, 4, 6 comme le suggère la série de Hilbert.

#### 4.4.2 L'algèbre des invariants

En effet, il est possible de construire un système de générateurs et de tester les dépendances linéaires. Le point de départ de la construction est la forme fondamentale

$$f := \sum_{0 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq 1} a_{i_1 i_2 i_3 i_4} x_{i_1} y_{i_2} z_{i_3} t_{i_4}.$$

Afin de réduire la taille des expressions, nous poserons

$$a_{i_1 i_2 i_3 i_4} = a_{8i_1 + 4i_2 + 2i_3 + i_4}.$$

Cette forme binaire admet un invariant de degré 2. Il s'agit de l'un des hyperdéterminants introduit par Cayley [31] (la seconde partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de cet invariant). Il vaut

$$H = a_0 a_{15} - a_1 a_{14} - a_2 a_{13} + a_3 a_{12} - a_4 a_{11} + a_5 a_{10} + a_6 a_9 - a_7 a_8. \quad (4.22)$$

On peut extraire deux invariants indépendants parmi trois que l'on peut définir en interprétant  $f$  comme une application linéaire  $\mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  [174].

$$L = \begin{vmatrix} a_0 & a_4 & a_8 & a_{12} \\ a_1 & a_5 & a_9 & a_{13} \\ a_2 & a_6 & a_{10} & a_{14} \\ a_3 & a_7 & a_{11} & a_{15} \end{vmatrix} \quad (4.23)$$

$$M = \begin{vmatrix} a_0 & a_8 & a_2 & a_{10} \\ a_1 & a_9 & a_3 & a_{11} \\ a_4 & a_{12} & a_6 & a_{14} \\ a_5 & a_{13} & a_7 & a_{15} \end{vmatrix} \quad (4.24)$$

$$N = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_8 & a_9 \\ a_2 & a_3 & a_{10} & a_{11} \\ a_4 & a_5 & a_{12} & a_{13} \\ a_6 & a_7 & a_{14} & a_{15} \end{vmatrix} \quad (4.25)$$

On a la relation

$$L + M + N = 0,$$

néanmoins, on peut tester facilement que deux d'entre eux (peu importe lesquels) sont linéairement indépendants et que  $H^2$  ne peut pas s'écrire comme une combinaison linéaire de ceux-ci.

Enfin, si on pose :

$$b_{xy} = \det \left( \frac{\partial^2 A}{\partial z_i \partial t_j} \right) = [x_0^2, x_0 x_1, x_1^2] B_{xy} \begin{bmatrix} y_0^2 \\ y_0 y_1 \\ y_1^2 \end{bmatrix},$$

on peut montrer que le polynôme

$$D = \det(B_{xy}). \quad (4.26)$$

est bien un invariant.

En se basant sur l'expression de la série, la liberté de l'algèbre est une conséquence de la non-nullité du Jacobien construit à partir des générateurs  $\{H, L, M, D\}$ .

D'après la formule générale de [63], l'hyperdiscriminant<sup>(4)</sup>  $\Delta$  est un invariant de degré 24. Il admet donc une expression en les invariants fondamentaux. En traitant les variables  $t_1$  et  $t_2$  comme des paramètres, la forme  $f$  peut être considérée comme une forme trilinéaire. Nous avons vu (3.2) que la forme trilinéaire admettait un invariant de degré 4 que l'on notera  $\Delta_T$  (hyperdiscriminant de la forme trilinéaire) dans ce paragraphe afin d'éviter

---

<sup>(4)</sup>Dans la papier [63], ce polynôme est appelé hyperdéterminant. Pour ne pas le confondre avec l'hyperdéterminant de degré 2, nous le nommerons *hyperdiscriminant*.

la confusion avec  $\Delta$ . Cet invariant est une quartique binaire en la variable  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$

$$\Delta_T = c_0 t_0^4 + 4c_1 t_0^3 t_1 + 6c_2 t_0^2 t_1^2 + 4t_0 t_1^3 + c_4 t_1^4,$$

qui admet à son tour deux invariants [155] : L'apolaire de  $\Delta_T$  avec lui-même

$$S := c_0 c_4 - 4c_1 c_3 + 3c_2^2$$

et le catalecticant

$$T := c_0 c_2 c_4 - c_0 c_3^2 + 2c_1 c_2 c_3 - c_1^2 c_4 - c_2^3.$$

Le discriminant de  $\Delta_T$  n'est autre que  $\Delta$  et peut être écrit en fonction de  $S$  et  $T$  [155]

$$\Delta = S^3 - 27T^2.$$

Les polynômes  $S$  et  $T$  sont aussi des invariants de  $f$ , et peuvent donc être exprimés en fonction des invariants fondamentaux, ce que l'on fait en utilisant un système de calcul formel (voir [133] pour le détail des calculs).

Pour finir, nous allons tester nos calculs sur les formes normales proposées par Verstraete et al. [195].

La forme normale générique qu'ils proposent pour une orbite stable est

$$\begin{aligned} G_{abcd} := & a(x_0 y_0 z_0 t_0 + x_1 y_1 z_1 t_1) + b(x_0 y_0 z_1 t_1 + x_1 y_1 z_0 t_0) \\ & + c(x_0 y_1 z_1 t_0 + x_1 y_0 z_1 t_0) + d(x_0 y_1 z_1 t_0 + x_1 y_0 z_0 t_1). \end{aligned}$$

Remarquons que si on pose  $\mathbb{X} = \{a^2, b^2, c^2, d^2\}$ , on a  $\Lambda_1(\mathbb{X}) = 2H(G_{abcd})$ ,  $\Lambda_2(\mathbb{X}) = (4M + 2L + H^2)(G_{abcd})$ ,  $\Lambda_3(\mathbb{X}) = (4D + 2HL)(G_{abcd})$ ,  $\Lambda_4(\mathbb{X}) = L(G_{abcd})^2$ . Ce qui signifie que  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$  et  $d^2$  sont les quatre racines de la quartique

$$X^4 - 2HX^3 + (H^2 + 2L + 4M)X^2 - (4D + 2HL)X + L^2 \quad (4.27)$$

On a des propriétés similaires pour les autres formes normales

Forme	racines de $X^4 - 2HX^3 + (H^2 + 2L + 4M)X^2 - (4D + 2HL)X + L$
$G_{abcd}$	4 racines simples
$L_{abc_2}$	2 simples et 1 double
$L_{a_2 b_2}$	2 doubles
$L_{ab_3}$	1 simple et 1 triple
$L_{a_4}$	1 quadruple
$L_{a_2 0_{3 \oplus \bar{1}}}$	2 doubles : dont une est 0
$L_{0_{5 \oplus \bar{3}}}$	1 quadruple : 0
$L_{0_{7 \oplus \bar{1}}}$	1 quadruple : 0
$L_{0_{3 \oplus \bar{1}} 0_{3 \oplus \bar{1}}}$	1 quadruple : 0

Comme dans le cas de la forme trilinéaire, les invariants ne sont pas suffisants car ils ne permettent pas de séparer  $L_{0_{5\oplus\bar{3}}}$ ,  $L_{0_{7\oplus\bar{1}}}$  et  $L_{0_{3\oplus\bar{1}}0_{3\oplus\bar{1}}}$ . Les résultats sur les invariants résumés ci-dessus proviennent de [133].

Dans l'annexe B, se trouve une discussion similaire concernant les formes normales de Chterental et Djorovic [39].

#### 4.4.3 Un ensemble fondamental de Covariants

Dans [23], nous avons trouvé un ensemble minimal de générateurs constitué de 170 covariants en utilisant l'algorithme du paragraphe 4.3, en s'aidant de la série de Hilbert et en prenant en compte des propriétés propres aux formes multilinéaires afin de simplifier les calculs.

Le tableau ci-dessous résume le résultat<sup>(5)</sup> et donne le nombre de covariants de degré  $d$  en les entrées de l'hypermatrice et de multi-degré  $\lambda$  en les variables auxiliaires.

$\lambda \backslash d$	$n_\lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0000	1		1		2		1						
1111	1	1		2		1							
2200	6		1		1		1						
2220	4				2		2		2				
3111	4			1		3		3		1			
3311	6							1		2		1	
4000	4				1				1				
4200	12						1		1		1		
5111	4							1		2		1	
6000	4												1

La connaissance d'un ensemble fondamental de covariants est plus que suffisante pour séparer les 3 dernières formes de Verstraete et al (voir paragraphe 4.4.2) En effet, si on considère les covariants  $C_{3111}$  et  $D_{2200}$  calculés dans [23], on a

$$\begin{aligned}
C_{3111}(L_{0_{5\oplus\bar{3}}}) &= 2(x_2y_2z_1t_1 - x_1y_2z_1t_1) \\
D_{2200}(L_{0_{5\oplus\bar{3}}}) &= 0 \\
C_{3111}(L_{0_{7\oplus\bar{1}}}) &= 2x_2(y_1z_1t_2 + y_1z_2t_1 - 2y_2z_1t_1)
\end{aligned}$$

<sup>(5)</sup>Les détails du calcul se trouvent dans [23]

$$\begin{aligned}
D_{2200}(L_{0_{7\oplus\bar{1}}}) &= -16x_2^2 z_1 z_2 \\
C_{3111}(L_{0_{3\oplus\bar{1}}0_{3\oplus\bar{1}}}) &= 0 \\
D_{2200}(L_{0_{3\oplus\bar{1}}0_{3\oplus\bar{1}}}) &= 0
\end{aligned} \tag{4.28}$$

#### 4.4.4 Covariants rationnels

L'algèbre des covariants rationnels est plus simple que celle des covariants polynomiaux. En effet, c'est un corps de fonctions rationnelles sur 12 générateurs indépendants. Le tableau suivant contient la liste des générateurs

Source $c_\alpha$	Covariant $C_\alpha$
$c_{0000}$	1
$c_{1000}$	0
$c_{0100}$	0
$c_{0010}$	0
$c_{0001}$	0
$c_{0011}$	$b_{xy}$
$c_{0101}$	$b_{xz}$
$c_{0110}$	$b_{xt}$
$c_{1001}$	$b_{yz}$
$c_{1010}$	$b_{yt}$
$c_{1100}$	$b_{zt}$
$c_{0111}$	$-C_{3111}$
$c_{1011}$	$-C_{1311}$
$c_{1101}$	$-C_{1131}$
$c_{1110}$	$-C_{1113}$
$c_{1111}$	$Hf^2 - b_{xy}b_{zt} - b_{xz}b_{yt} - b_{xt}b_{yz}$

où  $C_{3111}$ ,  $C_{1311}$ ,  $C_{1131}$  et  $C_{1113}$  sont des covariants calculés dans [23] faisant partie du système de générateurs décrit au paragraphe 4.4.3 et  $b_{xy} = \frac{1}{2}(f, f)^{0011}$ ,  $b_{xz} = \frac{1}{2}(f, f)^{0101}$  etc.. Ces polynômes ont été obtenus grâce au calcul des formes associées décrit dans [148]. On obtient les sources de formes associées en appliquant la série de substitutions

$$\begin{aligned}
x_1 &\rightarrow a_{0000}x_1 - a_{1000}x_2, & x_2 &\rightarrow a_{0000}x_2, \\
y_1 &\rightarrow a_{0000}y_1 - a_{0100}y_2, & y_2 &\rightarrow a_{0000}y_2, \\
z_1 &\rightarrow a_{0000}z_1 - a_{0010}z_2, & z_2 &\rightarrow a_{0000}z_2, \\
t_1 &\rightarrow a_{0000}t_1 - a_{0001}t_2, & t_2 &\rightarrow a_{0000}t_2.
\end{aligned}$$

à la forme fondamentale  $f$ . Ceci donne un nouveau polynôme  $F$  dont les coefficients en les monômes  $x_i y_j z_k t_l$  divisés par  $a_{0000}^{9-i-j-k-l}$  sont les sources des formes associées.

#### 4.4.5 Syzygies

Chaque polynôme covariant peut être écrit comme une fonction rationnelle des 12 covariants rationnels calculés au paragraphe 4.4.4. Il suffit pour cela de faire la substitution

$$a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \rightarrow \mathcal{C}_{i_1 i_2 i_3 i_4} f^{1-(i_1+i_2+i_3+i_4)}$$

dans la source du covariant. Par exemple si on applique cette substitution au covariant  $D_{4000}$  calculé dans [23] et dont la source est

$$\begin{aligned} & 2a_{0111}a_{0100}a_{0000}a_{0011} - 4a_{0111}a_{0010}a_{0001}a_{0010} \\ & - a_{0000}^2 a_{0111}^2 + 2a_{0111}a_{0000}a_{0001}a_{0110} \\ & + 2a_{0111}a_{0000}a_{0010}a_{0101} + 2a_{0110}a_{0001}a_{0011}a_{0100} \\ & - a_{0001}^2 a_{0110}^2 + 2a_{0110}a_{0001}a_{0010}a_{0101} \\ & - 4a_{0110}a_{0011}a_{0000}a_{0101} + 2a_{0101}a_{0010}a_{0011}a_{0100} \\ & - a_{0010}^2 a_{0101}^2 - a_{0011}^2 a_{0100}^2, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} D_{4000} &= -\frac{1}{\mathcal{C}_{0000}^2} (\mathcal{C}_{0111}^2 + 4\mathcal{C}_{0110}\mathcal{C}_{0011}\mathcal{C}_{0101}) \\ &= -\frac{1}{f^2} (C_{3111}^2 + 4b_{xt}b_{xy}b_{xz}). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Ce procédé nous permet d'obtenir des relations algébriques entre les générateurs (syzygies d'ordre 1). En effet, l'égalité (4.29) est équivalente à la syzygie

$$f^2 D_{4000} + C_{3111}^2 + 4b_{xy}b_{xz}b_{xt} = 0.$$

Cette méthode appliquée aux formes associées calculées dans le paragraphe 4.4.4 permet d'obtenir toutes les syzygies jusqu'au degré 5. En degré 6, on trouve deux syzygies qui ne peuvent pas être obtenues par cette méthode [23]. La première syzygie d'ordre 2 apparaît en degré 7 et est de multi-degré (5333) en les variables auxiliaires.

## 4.5 Invariants des formes binaires quintilinéaires

### 4.5.1 Série de Hilbert

D'après l'égalité (4.16), la série de Hilbert de l'algèbre des invariants est

$$\mathcal{I}_5(t) := \text{CT}_{\mathbf{u}} \frac{\left(1 - \frac{1}{u_1^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{u_5^2}\right)}{(1 - u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 t) \left(1 - \frac{u_2 u_3 u_4 u_5 t}{u_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{t}{u_1 u_2 u_3 u_4 u_5}\right)}. \quad (4.30)$$

Ce calcul est assez difficile à réaliser. En effet, une approche classique utilisant un développement en fraction simple engendre des résultats intermédiaires trop volumineux pour être traités à l'aide d'un système de calcul formel classique. Après de nombreux essais, nous avons réussi à finir le calcul en utilisant un algorithme dû à Guoce Xin [207]. Le résultat peut être écrit sous la forme

$$\mathcal{I}_5(t) := \frac{P(t)}{Q(t)} \quad (4.31)$$

où  $P(t)$  est un polynôme de degré 104 avec des coefficients positifs et

$$Q(t) = (1 - t^4)^5 (1 - t^6) (1 - t^8)^5 (1 - t^{10}) (1 - t^{12})^5.$$

Le détail du résultat se trouve dans [134]. D'après cette expression, il est clair qu'une description complète par générateurs et relations de cette algèbre est hors d'atteinte de tout système de calcul. Néanmoins, la positivité des coefficients de  $P(t)$  suggère la structure de Cohen-Macaulay de cette algèbre. Nous savons qu'il existe un ensemble de  $\dim H - \dim G = 2^5 - 3 \times 5 = 17$  invariants algébriquement indépendants. Le dénominateur  $Q(t)$  est précisément un produit de 17 facteurs, ce qui rend plausible le fait que ces invariants puissent être composés de 5 polynômes de degré 4 (que l'on notera  $D_1, \dots, D_5$ ), d'un polynôme de degré 6 ( $F$ ), de 5 polynômes de degré 8 ( $H_1, \dots, H_5$ ), d'un polynôme de degré 10 ( $J$ ) et de 5 invariants de degré 12 ( $L_1, \dots, L_5$ ). Ces 17 polynômes sont appelés invariants primaires. Le numérateur décrirait les invariants secondaires. Ils sont au nombre de 3014400 et tels que tout polynôme invariant peut s'écrire de façon unique comme une combinaison linéaire d'invariants secondaires avec des coefficients polynômiaux dans les invariants primaires.



### 4.5.2 Les invariants les plus simples

On peut calculer les plus petits invariants (jusqu'en degré 8), en se servant des transvectants. Au delà, les polynômes deviennent trop gros pour être gérés par un système de calcul formel. Comme pour la forme quadrilinéaire, nous devons calculer des covariants intermédiaires. Le plus simple d'entre eux est la forme de base

$$f = \sum_{0 \leq i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 \leq 1} a_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} x_{i_1} y_{i_2} z_{i_3} t_{i_4} u_{i_5},$$

que nous considérons comme une forme quadrilinéaire. Nous avons vu que la forme quadrilinéaire admet un invariant de degré 2 (l'hyperdétérinant). Appliqué à  $f$ , en considérant  $x_0$  et  $x_1$  comme des paramètres, ce polynôme est la forme binaire quadratique

$$b_x = (f, f)^{01111} = \alpha x_0^2 + 2\beta x_0 x_1 + \gamma x_1^2.$$

Son discriminant  $D_x = \beta - \alpha\gamma$  est un invariant de  $f$  de degré 4. On recommence l'opération en considérant successivement  $(y_0, y_1), \dots, (u_0, u_1)$  comme des paramètres et on construit 4 autres invariants  $D_y, D_z, D_t$  et  $D_u$ . On peut obtenir un invariant de degré 6 en appliquant une suite de transvections multiples. Tout d'abord, on calcule un covariant triquadratique de degré 2

$$B_{22020} = (f, f)^{00101}.$$

Ensuite, nous utilisons ce polynôme pour construire un covariant de degré 3,

$$C_{31111}(B_{22020}, f)^{01010},$$

puis un covariant triquadratique de degré 4

$$D_{22200} = (C_{31111}, f)^{10011}.$$

À partir de celui-ci, nous construisons un covariant quintilinéaire de degré 5

$$E_{11111} = (D_{22200}, f)^{11100}$$

et enfin le covariant de degré 6 que l'on recherche

$$F = (E_{11111}, f)^{11111}.$$

Pour calculer des invariants de degré 8, nous procédons de la façon suivante. On calcule deux covariants triquadratiques de degré 2,

$$B_{22200} = (f, f)^{00011}, B_{00222} = (f, f)^{11000}$$

Puis on transvecte la forme  $B_{22200}$  avec elle-même, pour obtenir une forme binaire quartique de degré 4

$$D_{40000} = (B_{22200}, B_{22200})^{02200}$$

Ensuite, on construit les formes triquadratiques de degré 6 suivantes

$$F_x = (D_{40000}, B_{22200})^{20000}, F_y = (D_{04000}, B_{22200})^{02000}, F_z = (D_{00000}, B_{22200})^{00200}, \\ F_t = (D_{04000}, B_{22200})^{00020}, F_u = (D_{04000}, B_{22200})^{00002}.$$

Finalement, on obtient 5 invariants

$$H_x = (F_x, B_{22200})^{22200}, H_y = (F_y, B_{22200})^{22200}, H_z = (F_z, B_{22200})^{22200}, \\ H_t = (F_t, B_{00222})^{00222}, H_u = (F_u, B_{00222})^{00222}.$$

Pour prouver que le système

$$\mathcal{S} = \{D_x, D_y, D_z, D_u, D_t, F, H_x, H_y, H_z, H_t, H_u\}$$

n'admet pas de relations algébriques, il suffit de calculer son Jacobien. Le calcul direct du déterminant étant assez long, le plus simple est de le calculer pour une évaluation aléatoire. Dans [134], nous donnons des valeurs des variables pour lesquelles il ne s'annule pas, ce qui prouve l'indépendance algébrique de ces polynômes. Ce sont potentiellement des invariants primaires.

### 4.5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les outils permettant d'obtenir un système complet de covariants et nous les avons illustrés par des exemples de la forme quadrilinéaire et quintilinéaire. Une description complète de l'anneau des covariants doit inclure en principe un ensemble de générateurs des syzygies des différents ordres. Or, les exemples montrent qu'une telle description est non seulement techniquement impossible à obtenir mais aussi que sa taille la rendrait humainement inexploitable. Dans le cas des petits

systèmes [195], la classification des orbites peut être obtenue en utilisant des aspects très fins de la théorie des algèbres de Lie semi-simples graduées de Vinberg [198, 200] (voir aussi le chapitre 5 pour le cas des formes  $3 \times 3 \times 3$ ). Cette stratégie ne fonctionne pas avec la forme quintilinéaire et les covariants restent les seuls outils permettant d'aborder le problème. Dans l'exemple de la forme quadrilinéaire, on observe que seul un petit nombre de covariants est nécessaire pour retrouver la classification de Verstraete et al. [195]. On peut donc espérer trouver un critère afin de choisir un petit sous-ensemble de covariants, avec des propriétés pertinentes, permettant d'obtenir la classification attendue. Pour illustrer ce principe, considérons les exemples d'états d'un système de 5-qubits proposés par Osterloh et Siewert [157], dans le but d'obtenir un début de classification

$$\begin{aligned}
|\Phi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|11111\rangle + |00000\rangle) \\
|\Phi_2\rangle &= \frac{1}{2} (|11111\rangle + |11100\rangle + |00010\rangle + |00001\rangle) \\
|\Phi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{2}|11111\rangle + |11000\rangle + |00100\rangle + |00010\rangle \\
&\quad + |00001\rangle) \\
|\Phi_4\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{3}|11111\rangle + |10000\rangle + |01000\rangle + |00100\rangle \\
&\quad + |00010\rangle + |00001\rangle).
\end{aligned}$$

Ces états, qui répondent à certains critères imposés par les deux physiciens, peuvent être séparés grâce à certains des covariants calculés dans [134] (voir table 4.1). La question à trancher est celle des critères à employer dans le cas général.

	$ \Phi_1\rangle$	$ \Phi_2\rangle$	$ \Phi_3\rangle$	$ \Phi_4\rangle$
$D_x$	$\times$	$\times$	0	0
$D_y$	$\times$	$\times$	0	0
$D_z$	$\times$	0	0	0
$D_t$	$\times$	0	0	0
$D_u$	$\times$	0	0	0
$F$	0	0	0	0
$B_x$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$C_{31111}$	0	0	$\times$	$\times$
$E_{11111}$	0	$\times$	0	$\times$

TAB. 4.1 – Évaluation des covariants sur les états proposés par Osterloh et Siewert ( $\times$  signifie que l'évaluation n'est pas nulle)



# Chapitre 5

## Forme ternaire trilinéaire

### 5.1 Introduction

Depuis les débuts de l'informatique quantique et de la cryptographie quantique, la physique quantique, au travers de la notion d'intrication, promet de réaliser des tâches connues comme étant impossibles dans le cas classique<sup>(1)</sup>. De petits systèmes de qutrits intriqués ont déjà été implémentés ou étudiés dans le cadre de la cryptographie quantique [16, 54]<sup>(2)</sup>. Le lecteur intéressé par l'histoire de cette discipline peut trouver dans [81] le point sur les connaissances en 2001. Il est attendu que l'étude de systèmes multipartites de plus grande dimension donnera lieu à de nombreuses nouvelles applications. Par exemple, Fitzi, Gisin et Maurer [60] ont montré que le problème des généraux Byzantins<sup>(3)</sup> admet une solution en terme de systèmes de 3 qutrits dans l'état d'Aharonov [16]. Cet état est assimilable à un tenseur

---

<sup>(1)</sup>Voir par exemple [178].

<sup>(2)</sup>Le premier protocole de cryptographie quantique a été proposé par Bennet et Brassard [16] en 1984. Il est basé sur le fait qu'il est impossible de faire une copie exacte d'un système quantique dont on ne connaît pas l'état.

<sup>(3)</sup>Le problème des généraux byzantins est une façon de modéliser la fiabilité des transmissions ainsi que l'intégrité des composants. On utilise souvent la métaphore de l'armée Byzantine faisant le siège d'une cité ennemie. Plusieurs camps sont disposés autour de la ville assiégée et ceux-ci doivent communiquer à l'aide de messagers afin d'élaborer un plan de bataille commun. Il faut tenir compte du fait qu'un certain nombre de généraux ont trahi et essayent de semer la confusion parmi les autres. Le problème consiste à trouver un algorithme qui permet aux généraux fidèles d'arriver à un consensus. Le problème des généraux byzantins a été étudié dans [109]. Il est connu qu'il n'existe pas d'algorithme pour 3 généraux dont 1 est un traître.

antisymétrique  $3 \times 3 \times 3$

$$|\mathcal{A}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|012\rangle + |120\rangle + |201\rangle - |021\rangle - |102\rangle - |210\rangle).$$

D'un point de vue théorique, l'état d'Aharonov d'un système de 3-qutrits permet d'obtenir des contre-exemples non-triviaux à la conjecture sur l'additivité de l'entropie relative d'intrication [202]. De plus, l'étude des états des systèmes de dimension supérieure met à jour des questions reliées au réalisme local et aux inégalités de Bell (l'article [97] contient une étude spécifique aux 3-qutrits). En particulier, il est intéressant de trouver des éléments de classification des systèmes de 3-qutrits. En fait deux directions ont été explorées, la première consiste à étudier les orbites pour l'action du groupe dynamique (dans le cas que l'on considère, il s'agit du groupe  $LUT := SU_3^{\times 3}$  des transformations locales unitaires<sup>(4)</sup>). La seconde consiste à classer les orbites pour l'action de son complexifié (le groupe des opérations locales stochastiques assistées par la communication classique  $SLOCC := SL_3^{\times 3}$ )<sup>(5)</sup>. La première voie, faisant intervenir de nombreux paramètres semble être impraticable pour le moment. Nous ne nous intéresserons donc qu'à la seconde. La méthode numérique introduite dans [194] par Verstraete et al. permet de calculer les états maximalement intriqués. Appliquée à un système pur de 3-qutrits, on trouve la forme normale

$$|\Phi\rangle \simeq \alpha(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle) + \beta(|012\rangle + |120\rangle + |021\rangle) + \gamma(|021\rangle + |102\rangle + |210\rangle)$$

où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des paramètres complexes. Il est intéressant de noter que l'état de Aharonov est sous forme normale en posant  $\alpha = 0$  et  $\beta = -\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$ . L'existence d'une telle forme normale fut prouvée en premier par Vinberg [198, 200] en utilisant sa notion de groupe de Weyl d'une algèbre de Lie graduée appliquée à la  $\mathbb{Z}_3$  graduation de l'algèbre de Lie exceptionnelle  $E_6$ . Dans ce cas, le groupe de Weyl est le groupe de réflexion complexe  $G_{25}$  de la classification de Shephard et Todd [179]. Néanmoins, une forme normale différente était connue dès 1939 dans les travaux de Chanler [37]<sup>(6)</sup>.

<sup>(4)</sup>Voir les articles [2, 28, 137, 194] pour l'étude de systèmes de qubits.

<sup>(5)</sup>Voir les articles [23, 49, 101, 133, 134, 195, 194] pour l'étude de systèmes de qubits.

<sup>(6)</sup>Chanler déduit sa forme normale des propriétés géométriques des cubiques planes. Elle ne faisait pas apparaître le rôle du groupe  $G_{25}$ , bien que celui-ci fut découvert par Maschke en 1889 [141] dans son étude du groupe de symétrie des 27 droites d'une surface cubique plane.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Tout d'abord, nous faisons quelques remarques sur l'espace des orbites (section 5.2). Nous donnons alors diverses expressions des invariants fondamentaux découverts par Chanler [37] (section 5.3). Enfin dans la section 5.4 nous discutons des formes normales, en particulier nous nous intéressons au problème de la forme de Klein. Nous montrons que les paramètres de la forme normale sont les racines d'une équation algébrique de degré 648. Enfin, nous montrons que les solutions de certaines dégénérescences de cette équation admettent des symétries liées à certains polytopes complexes réguliers [42].

## 5.2 L'espace des orbites

Nous considérons l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$  comme une représentation du groupe  $SLOCC = \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})^{\times 3}$  et nous nous intéressons à la classification des orbites de  $SLOCC$  dans  $\mathcal{H}$  et dans l'espace projectif  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ . Une classification géométrique des orbites a été obtenue à la fin des années 1930 dans une série d'articles de Thrall [185], Thrall et Chanler [186] et Chanler [37]. Dans des articles plus récents [153, 154], on trouve une discussion plus complète qui inclut la description de l'adhérence des orbites. Dans le cas général, les orbites de l'action d'un groupe sur une variété algébrique ne sont pas les points d'une variété algébrique. Pour remédier à cette situation, on doit éliminer certaines orbites dégénérées, il est alors possible de construire un quotient (dans le cas affine) ainsi qu'un espace de modules (dans le cas projectif) qui décrivent la géométrie des orbites suffisamment génériques. Le quotient géométrique  $Y = \mathcal{H}/SLOCC$  est défini comme étant une variété affine dont l'anneau de coordonnées est l'anneau des polynômes invariants  $R = \mathbb{C}[\mathcal{H}]^{SLOCC}$ . L'espace des modules est la variété projective  $\mathcal{M} = \mathrm{Proj}(R)$  pour laquelle  $R$  est l'anneau de coordonnées homogènes<sup>(7)</sup>. C'est le quotient de l'ensemble  $\mathbb{P}(\mathcal{H})^{ss}$  des points semi-stables par l'action de  $SLOCC$  (voir [201]). La première étape est le calcul de la série de Hilbert. On peut déduire des articles de Vinberg [198, 200] que cette algèbre est une algèbre libre sur trois générateurs de degré respectif 6, 9 et 12. La série de Hilbert est donc

$$\mathcal{I}_3(t) = \frac{1}{(1-t^6)(1-t^9)(1-t^{12})}.$$

---

<sup>(7)</sup>L'anneau de coordonnées homogènes est l'analogue projectif de l'anneau de coordonnées (voir [53]).



Des invariants  $I_6$ ,  $I_9$  et  $I_{12}$  sont connus depuis l'article de Chanler [37] qui les a calculés en utilisant les méthodes de la théorie classique des invariants. Nous allons montrer que ces invariants forment un système complet de générateurs.

Comme l'algèbre des invariants est une algèbre de polynômes, le quotient  $Y$  est l'espace affine  $\mathbb{C}^3$ . Considérons maintenant l'espace des modules. La variété projective dont l'anneau de coordonnées homogènes est une algèbre de polynômes sur des générateurs de degré respectif  $d_1, \dots, d_m$  est l'espace projectif pondéré  $\mathbb{P}(d_1, \dots, d_m)$ . Par définition, notre espace de modules est l'espace projectif pondéré  $\mathbb{P}(6, 9, 12) \cong \mathbb{P}(2, 3, 4)$ . Cet espace étant isomorphe à  $\mathbb{P}(1, 2, 3)$  [46] il peut être identifié à la *surface de del Pezzo*  $\mathbf{P}^6$  [77]. Les surfaces de del Pezzo sont des objets remarquables de par leurs liens avec les systèmes de racines exceptionnels [145].

### 5.3 Les invariants fondamentaux

Dans ce paragraphe, nous donnons une description des invariants fondamentaux ainsi que de certains concomitants obtenus par Chanler [37] sous une forme plus commode pour nos calculs. Comme dans le cas des systèmes de qubits, nous allons identifier un état de l'espace de Hilbert à une forme ternaire trilinéaire

$$f = \sum_{0 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 2} a_{i_1 i_2 i_3} x_{i_1} y_{i_2} z_{i_3}.$$

Pour construire les concomitants, nous avons besoin de la notion de transvectant adaptée aux formes ternaires. Soit  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  trois formes ternaires. Le produit tensoriel  $f_1 \otimes f_2 \otimes f_3$  s'identifie au polynôme  $f_1(\mathbf{x}^{(1)})f_2(\mathbf{x}^{(2)})f_3(\mathbf{x}^{(3)})$  en trois séries indépendantes de variables ternaires. L'opérateur  $\Omega_x$  de Cayley est l'opérateur différentiel

$$\Omega_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1^{(1)}} & \frac{\partial}{\partial x_1^{(2)}} & \frac{\partial}{\partial x_1^{(3)}} \\ \frac{\partial}{\partial x_2^{(1)}} & \frac{\partial}{\partial x_2^{(2)}} & \frac{\partial}{\partial x_2^{(3)}} \\ \frac{\partial}{\partial x_3^{(1)}} & \frac{\partial}{\partial x_3^{(2)}} & \frac{\partial}{\partial x_3^{(3)}} \end{vmatrix}.$$

Nous considérerons trois ensembles indépendants de variables ternaires  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  (covariantes). Contrairement au cas de formes binaires, nous avons besoin de variables contravariantes  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  et  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ . Les  $\xi_i$  sont duales des  $x_j$ , autrement dit, ce sont des formes linéaires sur l'espace engendré par les  $x_j$  telles que  $\xi_i(x_j) = \delta_{ij}$ .

Un *concomitant* est un polynôme  $F$  en les variables  $a_{i_1 i_2 i_3}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \xi, \eta$  et  $\zeta$  tel que pour tout  $g = (g_1, g_2, g_3) \in SLOCC$

$$F(g.A; g_1^{-1}\mathbf{x}, g_2^{-1}\mathbf{y}, g_3^{-1}\mathbf{z}; g_1.\xi, g_2.\eta, g_3.\zeta) = F(A; \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}; \xi, \eta, \zeta).$$

L'algèbre des concomitants n'admet qu'un seul générateur de degré 1 qui est la forme ternaire  $f$ . Les autres concomitants peuvent être déduits de  $f$  et des trois *invariants absolus*  $P_\alpha = \sum \xi_i x_i$ ,  $P_\beta = \sum \eta_j y_j$  et  $P_\gamma = \sum \zeta_k z_k$  en appliquant des transvections multiples. Considérons trois formes  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  en les 6 ensembles de variables ternaires  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \xi, \eta$  et  $\zeta$ . Pour tout  $(n_1, n_2, n_3) \times (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{N}^3 \times \mathbb{N}^3$ , on définit un transvectant multiple de  $F_1, F_2$  et  $F_3$  par

$$(F_1, F_2, F_3)_{m_1 m_2 m_3}^{n_1 n_2 n_3} := \text{tr} \Omega_{\mathbf{x}}^{n_1} \Omega_{\mathbf{y}}^{n_2} \Omega_{\mathbf{z}}^{n_3} \Omega_{\xi}^{m_1} \Omega_{\eta}^{m_2} \Omega_{\zeta}^{m_3} \prod_{i=1}^3 F_i(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)}, \xi^{(i)}, \eta^{(i)}, \zeta^{(i)}),$$

où  $\text{tr}$  est l'opérateur trace envoyant les variables  $\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i)}, \xi^{(i)}, \eta^{(i)}, \zeta^{(i)}$  sur respectivement  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \xi, \eta, \zeta$ . Pour simplifier, les notations nous écrirons

$$(F_1, F_2, F_3)^{n_1 n_2 n_3} := (F_1, F_2, F_3)_{m_1 m_2 m_3}^{n_1 n_2 n_3}.$$

Nous ne détaillerons pas ici l'ensemble des calculs que le lecteur pourra trouver dans l'article [24]. Nous ne donnerons que le calcul des concomitants nécessaires à l'obtention des invariants  $I_6$ ,  $I_9$  et  $I_{12}$ . L'invariant  $I_6$  s'obtient à partir du carré de la forme fondamentale

$$I_6 = \frac{1}{1152} (f^2, f^2, f^2)^{222}. \quad (5.1)$$

Pour calculer  $I_9$ , nous avons besoin des concomitants

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= (f, f, P_\beta P_\gamma)^{011}, \\ Q_\beta &= (f, f, P_\alpha P_\gamma)^{101}, \\ E_\alpha &= (Q_\alpha, f, P_\alpha)^{100}, \\ E_\beta &= (Q_\beta, f, P_\beta)^{010}. \end{aligned}$$

L'invariant  $I_9$  de Chanler s'écrit alors

$$I_9 = \frac{1}{576} (E_\alpha, E_\beta, E_\beta)_{111}^{111}. \quad (5.2)$$

Enfin, pour l'invariant  $I_{12}$ , nous utilisons le concomitant

$$B_\alpha = (f, f, f)^{011}.$$

Cet invariant est

$$I_{12} = \frac{1}{124416} (B_\alpha f, B_\alpha f, B_\alpha f)_{111}^{111}. \quad (5.3)$$

## 5.4 Formes normales et invariants

On peut montrer à partir de la théorie de Vinberg [200] qu'une forme trilinéaire générique est dans l'orbite d'une forme

$$\begin{aligned} N_{uvw}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = & u(x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3) \\ & + v(x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3 + x_3y_2z_1) \\ & + w(x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2) \end{aligned}$$

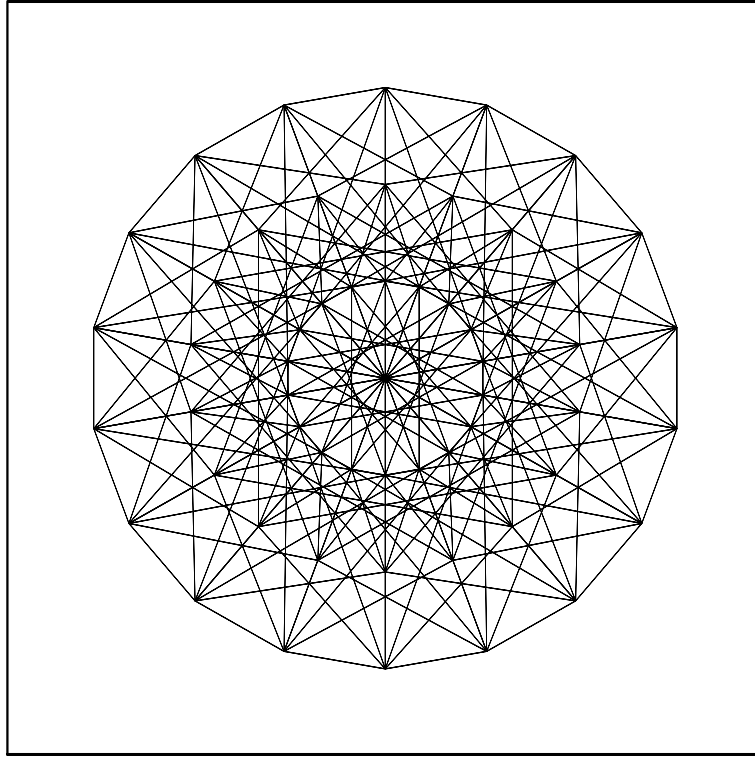
où  $u, v$  et  $w$  sont des paramètres (voir [24] pour une analyse approfondie sur ce sujet). Cette forme normale n'est pas unique. En effet, une forme générique  $f$  admet 648 formes normales, de plus, les triplets  $(u, v, w)$  pour lesquels ce nombre est réduit ont des propriétés géométriques intéressantes.

Remarquons tout d'abord que la série de Hilbert est aussi celle de l'anneau des invariants de  $G_{25}$ , le groupe numéro 25 de la classification des groupes de réflexions complexes irréductibles de Shephard et Todd [179]. Ce groupe d'ordre 648 est l'un des groupes considérés par Maschke [141] lors de son étude du groupe de symétrie des 27 droites d'une surface cubique générique dans  $\mathbb{P}^3$ . D'après Maschke, l'algèbre des invariants de  $G_{25}$  dans  $\mathbb{C}[u, v, w]$  est précisément  $\mathbb{C}[C_6, C_9, C_{12}]$  où  $C_6$  (resp.  $C_9, C_{12}$ ) est l'évaluation de  $I_6$  (resp.  $I_9, I_{12}$ ) sur  $N_{uvw}$ . En fait,

$$S = \{N_{uvw} | (u, v, w) \in \mathbb{C}^3\}$$

est une *section de Chevalley* de l'action de  $SLOCC$  sur  $\mathcal{H}$  de groupe de Weyl  $G_{25}$  ([177] p174).

Klein [99] a introduit la notion de “*Formenproblem*” associée à l'action d'un groupe fini. Cela consiste à calculer les coordonnées d'un point d'une orbite, les valeurs numériques des invariants étant fixées. Dans notre cas, il s'agit de trouver les paramètres  $(u, v, w)$  lorsque les valeurs des invariants  $a = I_6$ ,  $b = I_{12}$  et  $c = I_{18}$  sont fixées où  $I_{18}$  est un invariant de degré 18 utilisé à la place de  $I_9$  pour faciliter les calculs (à la fin du calcul, nous sélectionnons les solutions qui donnent le bon signe pour  $C_9$ ). Les points recherchés sont alors les 648 solutions d'un système d'équations algébriques (voir [24] pour le détail des calculs). Les cas particuliers pour lesquels il y a moins de triplets ont d'intéressantes propriétés géométriques. En effet, si  $b^3 = c^2$  et  $C_9 = 0$ , nous obtenons 216 triplets qui sont les centres des arêtes d'un polytope complexe de type  $2\{4\}3\{3\}3$  (voir [42] pour les notations) dans  $\mathbb{C}^3$  (voir Fig 5.1). Les sommets de ce polyèdre sont les sommets de

FIG. 5.1 – Le polyèdre  $2\{4\}3\{3\}3$ 

deux polyèdres Hessiens (Fig. 5.2) réciproques et ses arêtes joignent chaque sommet de l'un des polyèdres Hessian aux 8 sommets de l'autre qui sont les plus proches (les sommets des polytopes complexes sont représentés par des triangles équilatéraux de telle façon que la figure 5.2 peut être interprétée comme une projection à deux dimensions du polytope  $2_{21}$  à 6 dimensions de Gosset). Si  $b = a^2$  et  $c = b^3$ , les triplets sont au nombre de 72 et sont les centres des arêtes d'un polytope Hessian (ou les sommets d'un polytope complexe de type  $3\{3\}3\{4\}2$  Fig. 5.3). Lorsque  $b = c = 0$  et  $a \neq 0$ , il n'y a plus que 27 triplets qui sont les sommets d'un polytope Hessian (Fig 5.2).

On peut déduire la structure des stabilisateurs des formes normales des résultats Orlik et Solomon [156] sur les arrangements des 12 hyperplans formés par les miroirs des pseudoréflexions de  $G_{25}$ . Il y a trois cas non triviaux. Si l'orbite a 216 éléments, alors le stabilisateur est le groupe cyclique  $C_3$ . Les orbites ayant 72 éléments ont pour stabilisateur le produit de deux groupes

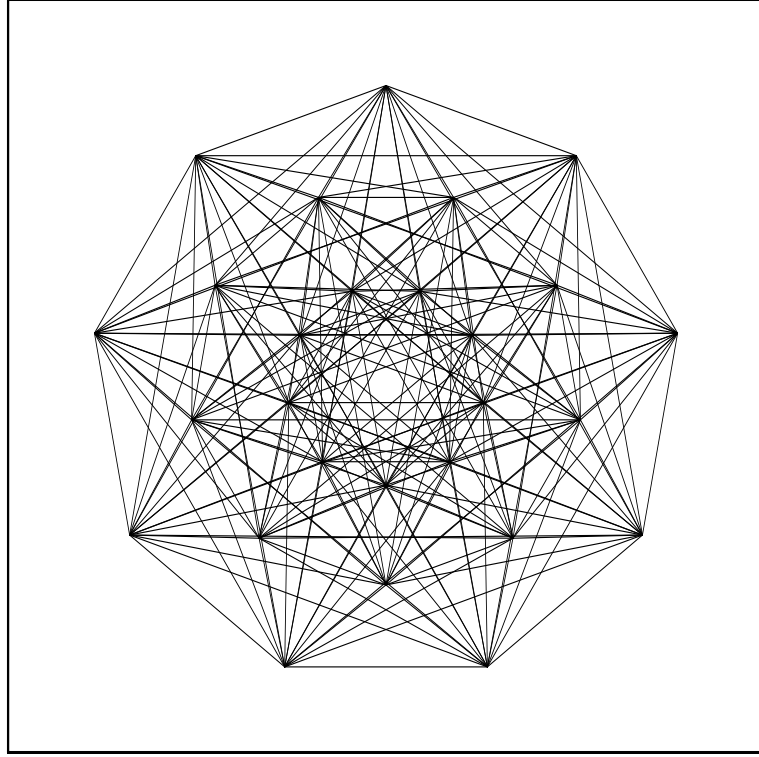


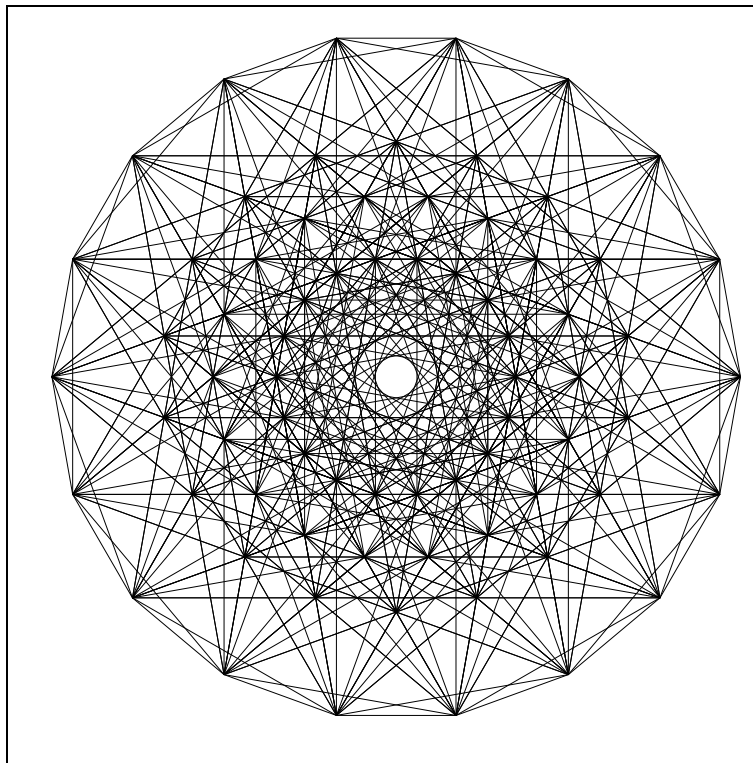
FIG. 5.2 – Le polyèdre Hessien.

(8)

cycliques  $C_3 \times C_3$ . Enfin, le stabilisateur des orbites associé aux polyèdres Hessien (avec 27 éléments) est le groupe  $G_4$  de la classification de Shephard et Todd [179].

## 5.5 Conclusion

Nous avons décrit les formes normales des orbites semi-stables des systèmes de 3-qutrits pour l'action du groupe  $SLOCC = SL_3(\mathbb{C})^{\times 3}$ . D'un point de vue physique, les résultats présentés ici peuvent être le point de départ d'une étude plus approfondie des propriétés des 3-qutrits en mettant en avant les différences avec les systèmes plus simples composés uniquement de qubits. D'un point de vue mathématique, nous avons traité un intéressant exemple

FIG. 5.3 – Le polyèdre  $3\{3\}3\{4\}2$ 

de théorie des invariants. En mêlant la théorie algébrique classique et les méthodes de géométrie moderne, nous avons exhibé des connexions avec la géométrie des polytopes complexes réguliers.



# Chapitre 6

## Invariants unitaires des formes binaires

### 6.1 Introduction

Une classification complète des états intriqués est nécessaire afin de réaliser les différentes applications attendues de l'information quantique. Il y a évidemment une discussion sur ce que les physiciens entendent par une telle classification. Une des questions types est : quelles sont les opérations que l'on peut réaliser sur un système sans dégrader ses propriétés quantiques ? D'après Vidal [197], on considère que l'on peut agir sur le système par des opérations locales qui ne changent pas l'intrication et des opérations non-locales qui elles peuvent la dégrader. Dans le cas d'un système pur de  $k$  qubits, nous considérerons que les opérations locales sont celles du groupe dynamique  $SU_2^{\times k}$ . Le groupe  $SLOCC := SL_2^{\times k}$ , qui est son complexifié, peut modifier l'intrication par passage à la limite (lorsqu'il existe des orbites semi-stables qui ne sont pas stables). La stratégie choisie pour obtenir la classification, consiste à rechercher des fonctions, appelées *mesures d'intrication*, qui sont invariantes sous l'action des transformations locales. Une des premières étapes importantes dans ce sens a été d'introduire la notion d'entropie d'intrication pour les systèmes purs bipartites [15]<sup>(1)</sup>.

Dans ce chapitre, nous suivons l'idée de Grassl et al. [73, 74] qui consiste

---

<sup>(1)</sup>Peu après, des tentatives d'extensions de cette mesure pour les états mixtes ont été proposées. Par exemple l'intrication de formation [17] et l'entropie relative d'intrication [193].



à décrire l'intrication à l'aide d'invariants unitaires (voir aussi [170, 171]). En d'autres termes, les mesures d'intrications seront, pour nous, des polynômes invariants pour l'action du groupe dynamique  $SU_2^{\times k}$ . Malheureusement, mis à part les systèmes les plus simples, la classification complète est rapidement incalculable. Plutôt que de rechercher la description complète des algèbres, il est préférable de se concentrer sur la définition d'invariants ayant des propriétés géométriques ou physiques remarquables. Vidal a défini les fonctions *monotones sur l'intrication* comme étant des mesures d'intrication (invariants unitaires) qui sont non croissantes en moyenne pour l'action du groupe  $SLOCC$  [197]. Dans cet article, il donne une caractérisation complète de ces fonctions et décrit un outil permettant d'en construire une infinité pour les systèmes bipartites. Nous ne nous attarderons pas sur cette notion, simplement signalons que de multiples exemples existent dans la littérature : L'hyperdiscriminant considéré par Miyake dans sa classification *oignon* des états purs [151], l'entropie de Von Neumann [150], la moyenne des entropies linéaires sur chacun des qubits [22], les fonctions  $D_n^{(k)}$  d'Emary [55] *etc.*. Grassl et al., dans [73] ainsi que dans un travail non-publié [74], ont calculé les séries de Hilbert ainsi que certains invariants unitaires pour les systèmes purs de 3 et 4 qubits, en se basant sur la méthode décrite dans [161]. Dans [137], nous avons repris ces calculs avec une approche différente : les invariants unitaires peuvent être (en principe) obtenus à partir des covariants linéaires dont on connaît un ensemble générateur minimal [23]. Ce chapitre reprend les travaux décrits dans l'article [137]. Il est organisé de la façon suivante. Dans la section 6.2 nous décrivons la méthode générale permettant d'obtenir les invariants unitaires à partir des covariants linéaires. Puis, dans la section 6.3, nous donnons une base de l'espace des invariants (spéciaux) unitaires de degré 4. Enfin, la section 6.4, est consacrée à des exemples. En particulier, nous nous intéresserons aux fonctions d'Emary [55], à la version linéaire de l'entropie de Von Neumann donnée dans [150] ainsi qu'aux exemples d'invariants apparaissant dans les travaux de Grassl et al. [73, 74].

## 6.2 Obtenir les invariants unitaires à partir des covariants linéaires

Nous considérerons trois groupes : le complexifié du groupe dynamique  $SLOCC := SL_2(\mathbb{C})^k$  qui est un groupe de Lie semi-simple complexe dont la

théorie des représentations découle directement de celle de  $SL_2(\mathbb{C})$ , le groupe dynamique du système  $LSUT := SU_2^k$  qui est le sous-groupe compact maximal de  $SLOCC$  (appelé groupe des *transformations locales spéciales unitaires* par les physiciens) et le groupe  $LUT := U_2^k$  des *transformations locales unitaires* [73]. Les polynômes invariants des hypermatrices pour l'action des groupes  $LUT$  et  $LSUT$  (que l'on nommera par la suite respectivement *invariants unitaires* et *invariants spéciaux unitaires*) peuvent être obtenus à partir des covariants pour l'action du groupe  $SLOCC$  (*covariants linéaires*<sup>(2)</sup>).

**Proposition 3** [137] *Si on note  $\Phi_{d,i}^{\mathbf{d}}$  un élément de la base de l'espace des covariants du groupe  $SLOCC$  de degré  $d$  dans les entrées de l'hypermatrice et de multi-degré  $\mathbf{d}$  dans les variables auxiliaires, on a*

1. *Les produits scalaires  $\langle \Phi_{d,i}^{\mathbf{d}} | \Phi_{d,j}^{\mathbf{d}} \rangle$  par rapport aux variables auxiliaires, les entrées  $a_{i_1 \dots i_k}$  étant considérées comme des scalaires, forment une base de l'espace des  $LUT$ -invariants.*
2. *De manière analogue, les produits scalaires  $\langle \Phi_{d,i}^{\mathbf{d}} | \Phi_{d',i}^{\mathbf{d}} \rangle$  (où  $d$  et  $d'$  ne sont pas forcément égaux) forment une base des  $LSUT$ -invariants.*

Le produit scalaire hermitien considéré ici se calcule grâce à la formule

$$\langle x_1 \cdots x_m | y_1 \cdots y_m \rangle = \text{perm}(\langle x_i | y_j \rangle) \quad (6.1)$$

où  $\langle x_i | y_j \rangle = 1$  si  $x_i = y_j$  et 0 dans le cas contraire.

Dans la suite, nous noterons  $\text{Inv}_k^G$  l'algèbre des invariants pour le groupe  $G$  des formes binaires  $k$ -linéaires. On notera  $\text{Inv}_k^{LUT}(2n)$  l'espace des invariants unitaires de degré  $n$  en les entrées  $a_{i_1 \dots i_k}$  ainsi qu'en leurs conjuguées  $\bar{a}_{i_1 \dots i_k}$  et  $\text{Inv}_k^{LSUT}(n_1, n_2)$  l'espace des invariants spéciaux unitaires de degré  $n_1$  en les  $a_{i_1 \dots i_k}$  et de degré  $n_2$  en les  $\bar{a}_{i_1 \dots i_k}$ .

La proposition 3 implique que l'on peut déduire les séries de Hilbert des algèbres d'invariants (spéciaux) unitaires de celles  $\mathcal{C}_k(t; \mathbf{u}; 1^k)$  des covariants linéaires.

**Corollaire 4** [137]

1. *La série de Hilbert  $\mathcal{I}_k^{LUT}(z)$  est le terme constant*

$$\mathcal{I}_k^{LUT}(z) := \sum_n \dim \text{Inv}_k^{LUT}(n) z^n = \text{T.C.}_{t, \mathbf{u}} \{ \mathcal{C}_k(z t; \mathbf{u}; 1^k) \mathcal{C}_k(\frac{z}{t}; \bar{\mathbf{u}}; 1^k) \}$$

---

<sup>(2)</sup>En général, il n'y aura pas d'ambiguïté et nous écrirons simplement *covariant*

où  $\mathbf{u} = \{\frac{1}{u_1}, \dots, \frac{1}{u_k}\}$ .

2. La série de Hilbert  $\mathcal{I}_k^{LSUT}(z)$  est le terme constant

$$\mathcal{I}_k^{LSUT}(z) := \sum_n \dim \text{Inv}_k^{LSUT}(n_1, n_2) z^{n_1} \bar{z}^{n_2} = \text{T.C.}_{\mathbf{u}} \{ \mathcal{C}_k(z; \mathbf{u}; 1^k) \mathcal{C}_k(\bar{z}; \bar{\mathbf{u}}; 1^k) \}$$

Autrement dit,

$$\dim \text{Inv}_k^{LUT}(2n) = \sum_{\omega} \dim \text{Cov}_k(n; \omega), \quad (6.2)$$

et

$$\dim \text{Inv}_k^{LSUT}(n_1, n_2) = \sum_{\omega} \dim \text{Cov}_k(n_1; \omega) \dim \text{Cov}_k(n_2; \omega). \quad (6.3)$$

En utilisant les résultats du paragraphe 4.2.2, nous pouvons directement exprimer ces séries de Hilbert comme des termes constants de fractions rationnelles.

**Proposition 5** *Les séries de Hilbert des algèbres d'invariants unitaires sont*

$$\mathcal{I}_k^{LUT}(z) = \left(-\frac{1}{2}\right) \text{T.C.}_{t, \mathbf{u}} \left\{ \frac{\prod_i u_i^2 (1 - u_i^{-2})^2}{\prod_{\substack{\alpha \in \{-1, 1\}^k \\ a = \pm 1}} (1 - t^a z \prod_i u_i^{\alpha_i})} \right\} \quad (6.4)$$

et

$$\mathcal{I}_k^{LSUT}(z) = \left(-\frac{1}{2}\right) \text{T.C.}_{\mathbf{u}} \left\{ \frac{\prod_i u_i^2 (1 - u_i^{-2})^2}{\prod_{\alpha \in \{-1, 1\}^k} (1 - z \prod_i u_i^{\alpha_i}) (1 - \bar{z} \prod_i u_i^{\alpha_i})} \right\}. \quad (6.5)$$

### 6.3 Petits invariants unitaires

On peut montrer que l'espace des covariants de degré 4 est engendré par les polynômes  $f^2$  et  $B_{\mathbf{d}} = (f, f)^{\frac{2-d_1}{2} \dots \frac{2-d_k}{2}}$  où  $\mathbf{d}$  est un vecteur de  $\{0, 2\}^k$

ayant un nombre strictement positif pair de 0. En fait, chaque espace multi-homogène de degré 4 en les entrées et de multi-degré  $\mathbf{d}$  en les variables auxiliaires est de dimension 0 ou 1. Seuls les espaces engendrés par des polynômes dont le multi-degré en les variables auxiliaires possèdent un nombre pair de 0 ne sont pas nuls. Pour tout  $\mathbf{d}$ , on construit l'invariant unitaire

$$\mathbf{B}_{\mathbf{d}} = \langle B_{\mathbf{d}} | B_{\mathbf{d}} \rangle.$$

On définit de cette façon  $2^{k-1}$  invariants non nuls. Or la dimension de l'espace des polynômes de degré 4 invariants pour l'action du groupe  $LUT$  est

$$\dim \text{Inv}_k^{LUT}(4) = \sum_{\mathbf{d}} (\dim \text{Cov}_k(2, \mathbf{d}))^2 = 2^{k-1}.$$

On en déduit le résultat suivant :

**Proposition 6** *L'espace des invariants de degré 4 pour le groupe  $LUT$  est de dimension  $2^{k-1}$  et est engendré par les polynômes  $\mathbf{B}_{\mathbf{d}}$  et  $\langle f|f \rangle^2$ .*

De plus on a

$$\mathbf{B}_{2\dots 2} = \langle f^2 | f^2 \rangle = 2^k \langle f | f \rangle^2 - \sum_{\mathbf{d} \neq (2, \dots, 2)} \mathbf{B}_{\mathbf{d}},$$

ce qui signifie que l'on peut choisir  $\mathbf{B}_{2\dots 2}$  à la place de  $\langle f|f \rangle^2$  dans la base.

Pour construire les invariants spéciaux unitaires de degré 4, il faut connaître en plus les covariants de degré 3 et 4. Notons  $(C_i)_i$  une base de l'espace des covariants  $k$ -linéaires. Une base de l'espace des invariants spéciaux unitaires de degré  $(3, 1)$  peut être obtenue en calculant les produits scalaires  $\mathbf{C}_i := \langle C_i | f \rangle$ . Nous noterons  $(D_i)_i$  une base de l'espace des polynômes invariants (pour le groupe SLOCC) de degré 4, celle-ci est obtenue en transvectant les polynômes  $C_i$  avec la forme fondamentale  $f$ . On a alors le résultat suivant.

**Proposition 7** *L'espace des invariants spéciaux linéaires de degré 4 est de dimension*

$$\frac{7}{3}2^{k-1} - \frac{4}{3}(-1)^{k-1}$$

*et est engendré par les polynômes  $D_i$  et  $\overline{D}_i$  (pour les bidegrés  $(4, 0)$  et  $(0, 4)$ ), les polynômes  $\mathbf{C}_i$  et  $\overline{\mathbf{C}}_i$  (pour les bidegrés  $(3, 1)$  et  $(1, 3)$ ) et les polynômes  $\mathbf{B}_{\mathbf{d}}$  (pour le bidegré  $(2, 2)$ ).*

## 6.4 Exemples

### 6.4.1 Entropie linéaire

En 2002, Meyer et Wallach [150] ont défini une mesure d'intrication notée  $\mathcal{Q}$  en relation avec la forme linéaire de l'entropie de Von Neumann d'un simple qubit avec le reste du système <sup>(3)</sup>. Cette mesure est une somme de fonctions  $D^{(i)}$  (à une normalisation globale près) dont Emary [55] a prouvé qu'elles sont monotones sur l'intrication (en particulier ce sont des invariants unitaires). Dans [137], nous montrons que chaque  $D_1^{(i)}$  peut être écrit comme une somme de carrés scalaires de transvectants et qu'en définitive on a

$$D_1^{(i)} = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{\mathbf{d}} \mathbf{B}_{\mathbf{d}},$$

où la somme parcourt les vecteurs  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_k) \in \{0, 2^k\}$  tels que  $d_i = 0$ . La fonction  $\mathcal{Q}$  peut alors s'écrire en fonction des invariants précédemment calculés

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2^{k-2}k} \sum_{\mathbf{d} \in \{0,2\}^k} |\mathbf{d}|_0 \mathbf{B}_{\mathbf{d}},$$

où  $|\mathbf{d}|_0$  désigne le nombre d'occurrences de 0 dans le vecteur  $\mathbf{d}$ .

### 6.4.2 Invariants unitaires des 3-qubits

À partir du système de covariants calculé au paragraphe 4.2.3, on peut calculer une base de l'algèbre des invariants unitaires

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{111} &= \langle f|f \rangle \\ \mathbf{B}_{200} &= \langle H_x|H_x \rangle \\ \mathbf{B}_{020} &= \langle H_y|H_y \rangle \\ \mathbf{B}_{002} &= \langle H_z|H_z \rangle \\ \mathbf{C}_{111} &= \langle T|T \rangle \\ \mathbf{D}_{000} &= \langle \Delta|\Delta \rangle \\ \mathbf{F}_{222} &= \langle \Delta f^2|T^2 \rangle. \end{aligned}$$

Grassl et al. ont calculé [73] un système minimal de 7 générateurs de cette algèbre et ont obtenu la série de Hilbert grâce à un calcul de résidu utilisant

---

<sup>(3)</sup>Cette mesure a aussi été considérée par Brennen [22].

	$\mathbf{B}_{200}$	$\mathbf{B}_{020}$	$\mathbf{B}_{002}$	$\mathbf{D}_{000}$
$ GHZ\rangle$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$ W\rangle$	$\times$	$\times$	$\times$	0
$ B_1\rangle =  001\rangle +  010\rangle$	$\times$	0	0	0
$ B_2\rangle =  001\rangle +  100\rangle$	0	$\times$	0	0
$ B_3\rangle =  010\rangle +  100\rangle$	0	0	$\times$	0
$ 000\rangle$	0	0	0	0

TAB. 6.1 – Classification des 3-qubits,  $\times$  signifie la non nullité de l'évaluation de l'invariant.

le système Magma. Dans [137], nous exprimons ces générateurs en fonction des polynômes calculés ci-dessus et nous avons reproduit le calcul de la série de Hilbert en utilisant l'algorithme de Guoce Xin [207], déjà utilisé pour calculer la série des invariants du système de 5-qubits, sous *Maple*. On a le résultat suivant.

**Proposition 8** [137] *L'algèbre des invariants unitaires d'un système pur de 3-qubits est engendrée par  $\mathbf{A}_{111}$ ,  $\mathbf{B}_{200}$ ,  $\mathbf{B}_{020}$ ,  $\mathbf{B}_{002}$ ,  $\mathbf{C}_{111}$ ,  $\mathbf{D}_{000}$  et  $\mathbf{F}_{222}$ . La série de Hilbert est*

$$\mathcal{I}_3^{LUT}(z) = \frac{1 - t^{24}}{(1 - t^2)(1 - t^4)^3(1 - t^6)(1 - t^8)(1 - t^{12})}. \quad (6.6)$$

Le numérateur suggère l'existence d'une unique syzygie en degré 24.

Les formes normales des 3-qubits pour l'action du groupe *SLOCC* sont connues depuis 1881 [124]. Comme on peut le voir dans la table 6.1, les orbites du groupe *SLOCC* sont caractérisées par les propriétés d'annulation des invariants unitaires. De plus les résultats du paragraphe 6.4.1 permettent de décrire la classification en oignon de Miyake [151] en terme de fonctions monotones sur l'intrication (voir fig 6.1)

Un autre résultat non publié par Grassl et al. peut être retrouvé en utilisant l'algorithme de Xin [207]. Il s'agit du calcul de la série de Hilbert de l'algèbre des invariants spéciaux unitaires,

$$\mathcal{I}_3^{LSUT}(z) = \frac{z^5 \overline{z}^5 + z^3 \overline{z}^3 + z^2 \overline{z}^2 + 1}{(1 - z \overline{z})(1 - z^4)(1 - \overline{z}^4)(1 - z \overline{z}^3)(1 - z^3 \overline{z})}. \quad (6.7)$$

Cette expression suggère que cette algèbre possède une structure de Cohen-Macaulay avec 6 invariants primaires de bidegré respectif (1,1), (0,4), (2,2),

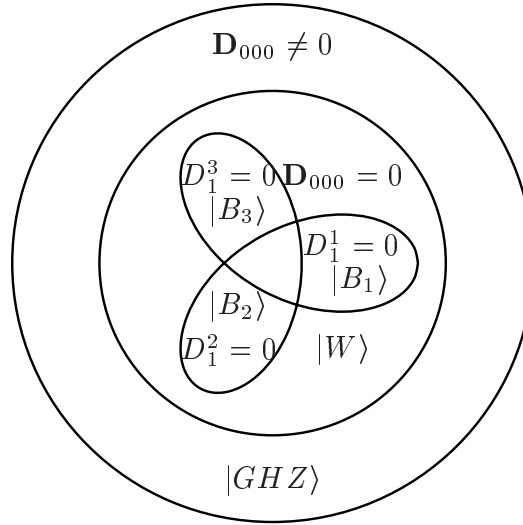


FIG. 6.1 – Classification “oignon” des 3-qubits

(2,2),(4,0), (1,3) et (3,1) et 3 invariants secondaires de bidegré (2,2), (3,3) et (5,5). L’algèbre serait donc un module libre sur l’algèbre (libre) engendrée par les invariants primaires

$$\text{Inv}_3^{LSUT} = \bigoplus_{c \in \mathcal{S}} \mathbb{C}[\mathcal{P}]_c.$$

Dans [137], nous suggérons que

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{A}_{111}, f_2, f_3, \Delta, \overline{\Delta}, s_2 := \langle A, T \rangle, \overline{s_2}\},$$

où  $f_2 := \mathbf{A}_{111}^2 - \mathbf{B}_{200} - \mathbf{B}_{020}$ ,  $f_3 := \mathbf{A}_{111}^2 - \mathbf{B}_{200} - \mathbf{B}_{002}$ ,  $s_2 := \langle A|T \rangle$  sont des invariants calculés par Grassl et al. [74]. L’ensemble des générateurs secondaires serait

$$\mathcal{S} = \{f_4, f_5, f_4 f_5\}$$

où

$$f_4 := \mathbf{A}_{111}^2 - \mathbf{B}_{020} - \mathbf{B}_{002}$$

et

$$f_5 := \mathbf{A}_{111}^3 + \frac{3}{2}\mathbf{C}_{111} - \frac{3}{2}\mathbf{A}_{111}(\mathbf{B}_{200} + \mathbf{B}_{020} + \mathbf{B}_{002})$$

sont deux autres des générateurs calculés par Grassl et al. dans [74].

### 6.4.3 Invariants unitaires de 4-qubits

La série de Hilbert des invariants unitaires (*LUT*) d'un système de 4 qubits a été calculée elle aussi par Grassl et al. [74] mais non publiée. Nous avons reproduit son calcul grâce à l'algorithme de Xin [207]. Cette série est

$$\mathcal{I}_3(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

où  $P(z) = 1 + \sum_{i=1}^{76} a_i z^i$  est un polynôme de degré 76 à coefficients positifs (la description complète de ce polynôme se trouve dans [137]) et

$$Q(z) = (1 - z^{10})(1 - z^8)^4(1 - z^6)^6(1 - z^4)^7(1 - z^2).$$

Ce qui suggère que cette algèbre possède une structure de Cohen-Macaulay avec 19 invariants primaires. Le nombre d'invariants secondaires est  $P(1) = 1449936$ . Il est évident qu'une description complète de cette structure ne peut pas être obtenue par un calcul utilisant un système formel classique et qu'elle serait de toute façon inexploitable. Néanmoins, on peut calculer les premiers invariants primaires à partir des covariants calculés dans [23]. Le plus simple d'entre eux est le carré scalaire de la forme de base  $\mathbf{A}_{111} = \langle f|f \rangle$ . Les invariants de degré 4 sont engendrés par les carrés scalaires des 7 covariants de degré 2  $\mathbf{B}_{2200}$ ,  $\mathbf{B}_{2020}$ ,  $\mathbf{B}_{2002}$ ,  $\mathbf{B}_{0220}$ ,  $\mathbf{B}_{0202}$ ,  $\mathbf{B}_{0022}$  et  $\mathbf{B}_{0000}$  ainsi que par  $\mathbf{A}_{111}^2$ .

L'espace des covariants de degré 3 est engendré par 2 covariants quadri-linéaires que l'on notera  $C_{1111}^1$  et  $C_{1111}^2$  et quatre formes cubico-trilinéaires  $C_{3111}$ ,  $C_{1311}$ ,  $C_{1131}$  et  $C_{1113}$ . Ces covariants sont obtenus en transvectant l'un des covariants biquadratiques de degré 2 avec la forme fondamentale  $f$  [23]. On considérera aussi les covariants quartiques de degré 4,  $D_{4000}$ ,  $D_{0400}$ ,  $D_{0040}$  et  $D_{0004}$ , un covariant biquadratique de degré 4,  $D_{2200}$  et un covariant cubico-trilinéaire de degré 5,  $E_{3111}$  calculés dans [23]. Nous montrons dans [137] que les invariants unitaires

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_{1111}, \\ &\mathbf{B}, \mathbf{B}_{2200}, \mathbf{B}_{2020}, \mathbf{B}_{2002}, \mathbf{B}_{0220}, \mathbf{B}_{0202}, \mathbf{B}_{0022} \\ &\langle C_{1111}^1, C_{1111}^1 \rangle, \langle C_{1111}^1, AB \rangle, \langle C_{3111}, C_{3111} \rangle, \langle C_{1311}, C_{1311} \rangle, \langle C_{1131}, C_{1131} \rangle, \langle C_{1113}, C_{1113} \rangle \\ &\langle D_{4000}, D_{4000} \rangle, \langle D_{0400}, D_{0400} \rangle, \langle D_{0040}, D_{0040} \rangle, \langle D_{0004}, D_{0004} \rangle \\ &\langle E_{3111}, E_{3111} \rangle \end{aligned} \tag{6.8}$$



sont algébriquement indépendants et sont donc de bons candidats pour être des invariants primaires.

Enfin, la série de Hilbert des invariants spéciaux unitaires peut être obtenue elle aussi en utilisant l'algorithme de Xin [207] (cette série a été calculée par Grassl et al. dans un manuscrit non publié [74]). On a

$$\mathcal{I}_3^{LSUT}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

où  $P(t) = \sum_{ij} a_{ij} z^i \bar{z}^j$  est un polynôme de bidegré (34, 34) décrit complètement dans [137] et

$$Q(t) = \frac{(1 - z\bar{z})(1 - z^2\bar{z}^2)^4(1 - z^3\bar{z}^3)(1 - z^2)(1 - z^4)^2(1 - z^6)(1 - \bar{z}^2)(1 - \bar{z}^4)^2(1 - \bar{z}^6)(1 - z^3\bar{z})^3(1 - z\bar{z}^3)^3(1 - z^2\bar{z}^4)(1 - z^4\bar{z}^2)(1 - z\bar{z}^5)(1 - z^5\bar{z})}{(1 - z\bar{z})(1 - z^2\bar{z}^2)^4(1 - z^3\bar{z}^3)(1 - z^2)(1 - z^4)^2(1 - z^6)(1 - \bar{z}^2)(1 - \bar{z}^4)^2(1 - \bar{z}^6)(1 - z^3\bar{z})^3(1 - z\bar{z}^3)^3(1 - z^2\bar{z}^4)(1 - z^4\bar{z}^2)(1 - z\bar{z}^5)(1 - z^5\bar{z})} .$$

## 6.5 Conclusion

Nous avons proposé ici une méthode permettant de calculer une base de l'algèbre des polynômes invariants (spéciaux) linéaires des hypermatrices de dimension  $2^k$  (systèmes purs de  $k$ -qubits). Cette méthode comprend comme étape intermédiaire le calcul d'une base des covariants linéaires. L'intérêt de cette étape réside dans le fait qu'il semble plus facile d'extraire des propriétés géométriques pertinentes des covariants (du moins pour les petits degrés). La description complète de l'algèbre des systèmes de plus de 3 qubits n'est pas possible même à l'aide des plus puissants systèmes de calcul. Cela signifie que l'information importante réside seulement dans certains invariants ayant des propriétés physiques ou géométriques remarquables. L'approche proposée par les physiciens consiste à sélectionner les polynômes qui sont monotones sur l'intrication. Nous avons vu qu'une autre approche, plus algébrique, consiste à sélectionner les invariants primaires en exhibant la structure Cohen-Macaulay de l'algèbre. La suite du travail consistera à concilier les deux points de vue en étudiant les propriétés géométriques des mesures monotones sur l'intrication. En particulier, il serait intéressant de savoir si on peut choisir des invariants primaires ayant la propriété de monotonie.

# Chapitre 7

## Conclusion

Le problème de la construction de mesures d'intrication convenables repose sur la recherche de fonctions monotones pour l'intrication [197]. Nous avons vu que de telles fonctions peuvent être obtenues à partir des concomitants en calculant des carrés scalaires. Dans le cas des 4-qubits, nous avons trouvé un ensemble générateur de 170 covariants (*c.f.* chapitre 4), ce qui nous donne une bonne base de calcul pour expérimenter ce procédé et tester la pertinence des fonctions ainsi obtenues. La connaissance des 170 générateurs est plus que suffisante pour distinguer les 9 formes normales proposées par Verstraete et al. [195]. Mais il reste beaucoup de questions en suspens. Quels sont les covariants ayant un sens géométrique ? Comment peut-on en sélectionner un nombre minimal en conservant la propriété de différenciation des formes normales ? Les techniques de classification des éléments semi-simples et nilpotents des algèbres de Lie semi-simples graduées mises en évidence par Vinberg [198, 200] peuvent nous apporter des éléments de réponse. Pour le cas des 4-qubits, il serait intéressant d'utiliser ce procédé afin de retrouver la classification de Verstraete et de donner le graphe d'adhérence des orbites. L'aspect géométrique de la théorie des invariants et notamment la notion de section de Chevalley, que nous avons illustrée avec le cas des 3-qutrits (chapitre 5), peut nous aider à déterminer des covariants remarquables. Lorsque le nombre de particules intriquées grandit, la dimension de l'espace des invariants de degré fixé  $d$  se comporte asymptotiquement comme une puissance du nombre de tableaux standard de forme  $(d^n)$  où  $n$  est la dimension des espaces (par exemple : 2 pour les qubits, 3 pour les qutrits *etc.*). On peut trouver ce résultat dans les articles de J.L. and R. Brylinsky [25, 26]. Un phénomène similaire se produit pour l'espace des concomitants. Ces observations

pourraient être exploitées afin de définir une notion simplifiée d'intrication (et de mesure) pour les systèmes formés d'un grand nombre de particules. À l'inverse, il est aussi possible de calculer les dimensions (et de donner des formules) pour les espaces de concomitants de petits degrés. On observe, alors, certaines régularités lorsque l'on fait varier la taille des qudits. Ceci laisse penser qu'il existe une structure commune à ces espaces. Une compréhension profonde du phénomène d'intrication requiert la connaissance de polynômes invariants sous l'action de transformations locales unitaires ( $LUT = U_2^k$  ou  $SLUT = SU_2^k$  pour les k-qubits). L'interprétation des résultats obtenus dans le chapitre 6 reste encore à faire et nécessitera de longues investigations.

Enfin, les systèmes dont il est question dans ce chapitre sont des systèmes quantiques purs. C'est une vision idéale de ce qui se passe en réalité. Dans la nature, les systèmes interagissent avec leur environnement et des phénomènes de décohérence rendent les gros systèmes très instables. La modélisation des qubits est alors différente de celle que l'on a explorée : les états sont dits mixtes et sont décrits par des matrices de densité. Quelles sont alors parmi les notions que l'on a présentées, celles qui peuvent être transposées au cas des systèmes mixtes ?

Deuxième partie

Hyperdéterminants



# Chapitre 8

## Introduction

La seconde partie de ce mémoire est consacrée à l'étude d'un invariant particulier que l'on nommera *hyperdéterminant*. Le terme d'hyperdéterminant a été inventé par Cayley [31, 32] et dans la littérature peut désigner d'autres invariants. Par exemple, l'hyperdéterminant considéré par Gelfand, Kapranov et Zelevinsky [63] n'est pas celui que nous étudierons ici. Il s'agit d'un invariant beaucoup plus gros possédant de nombreuses propriétés géométriques. Nous l'avons appelé hyperdiscriminant dans la première partie de ce mémoire.

Les hypermatrices furent considérées dès le XVII<sup>ème</sup> siècle dans la correspondance entre Fermat et Mersenne à propos des cubes magiques (la notation par indice n'était pas encore utilisée). Dans la remarquable notice historique de sa "*théorie des déterminants à  $n$  dimensions*" [116], Maurice Lecat mentionne que Vandermonde [192], à propos du problème du cavalier<sup>(1)</sup> dont il donna une version tri-dimensionnelle, fut le premier à utiliser des éléments à plus de deux indices. C'est peu après avoir introduit les notations modernes des déterminants que Cayley proposa différentes généralisations multi-dimensionnelles sous le même nom d'hyperdéterminant [29, 30]. Sous l'impulsion de Rice et Lecat [164, 165, 166, 117, 119, 120], à la fin des années 1920, quelques articles ont traité de polynômes un peu plus généraux appelés *riciens* par Lecat [117]. Ces polynômes diffèrent des hyperdéterminants par le fait que certains indices peuvent être non-alternants. Une bibliographie exhaustive jusqu'en 1960 peut être trouvée dans l'ouvrage [180] de Sokolov.

---

<sup>(1)</sup>Le problème du cavalier consiste à trouver une séquence de déplacement d'un cavalier sur un échiquier de façon à ce que chaque case soit visitée exactement une fois.

On trouve aussi quelques références plus récentes [13, 64, 78].

Dans [135, 136], nous avons étudié le lien entre certains hyperdeterminants de tenseurs de Hankel (dont les entrées ne dépendent que de la somme des indices) et les intégrales multiples de type Selberg. L'intégrale de Selberg et ses généralisations se rencontrent dans de nombreux domaines connectés aux statistiques et aux matrices aléatoires [147]. Il s'agit d'une généralisation de l'intégrale Beta d'Euler introduite par Selberg en 1944 [176] dans le but de démontrer une généralisation d'un théorème de Gelfond. Selberg prouva qu'une telle intégrale peut s'écrire comme un produit de quotients de fonctions Gamma d'Euler ; une preuve est reproduite dans [147]. Dans [135, 136], nous montrons qu'elle peut s'exprimer comme un hyperdeterminant de Hankel dont les entrées sont des moments associés à la distribution Beta. Cette remarque nous permet de calculer de nombreux hyperdeterminants de nombres combinatoires tels que les factorielles, les nombres de Catalan, les coefficients binomiaux centraux *etc.*. Par le même principe, d'autres hyperdeterminants sont exprimables à partir de généralisation des intégrales de Selberg. Par exemple, nous exploitons les intégrales d'Aomoto [6] et de Kaneko [95]. Nous calculons des hyperturaniens (*i.e.* des hyperdeterminants de tenseurs dont les entrées sont polynômes orthogonaux) en fonction de polynômes orthogonaux, fonctions hypergéométriques et polynômes orthogonaux symétriques associés aux polynômes de Jack [106, 107, 108]. L'astuce consistant à considérer une intégrale multiple, dans laquelle intervient une puissance paire du déterminant de Vandermonde, comme un hyperdeterminant s'obtient par un simple développement de ce dernier. Cependant, il existe une explication plus profonde de ce phénomène reliée au lemme de Chen [38] sur les intégrales itérées. C'est ce que nous avons étudié dans un article antérieur [132]. En considérant des identités sur les pfaffiens et hafniens dans l'algèbre du produit de mélange, nous donnons des généralisations des formules de De Bruijn [44]. Certaines d'entre elles font apparaître un invariant des tenseurs antisymétriques défini par Barvinok [13] : l'hyperpfaffien. Celui-ci peut être évalué dans certains cas en un hyperdeterminant de Hankel. Certains hyperdeterminants et certains hyperpfaffiens peuvent donc être calculés par le biais d'intégrales multiples. Ces calculs généralisent les formules de Heine [80] et de De Bruijn [44]. Réciproquement, nous pouvons utiliser des techniques hyperdeterminantales pour calculer certaines intégrales multiples. Dans [136], nous donnons quelques techniques de calcul élémentaires sur les hyperdeterminants (telles que la propriété d'invariance, les formules de sommation sur les mineurs, le développement des hyperdeterminants de Hankel), et nous les

illustrons par de nouvelles preuves des intégrales de Selberg et d'Aomoto.

Si les hyperdéterminants de Hankel ne semblent pas avoir été étudiés avant notre article [135], certaines autres généralisations de calculs déterminantaux classiques apparaissent très tôt dans la littérature. C'est le cas des déterminants de Smith [182] dont les entrées ne dépendent que du *pgcd* des indices, dont la première version hyperdéterminantale est due à Lehmer en 1930 et est contemporaine de l'invention des riciens. Haukkanen a récemment généralisé ce résultat pour des hypermatrices dont les indices appartiennent à un ensemble arbitraire d'entiers [78]. Dans [130], nous étendons ce dernier résultat au cas où les indices appartiennent à un demi-treillis inférieur et pour une généralisation des hyperdéterminants : les  $\mathfrak{F}$ -déterminants.

Après avoir, dans le chapitre 9<sup>(2)</sup>, donné les définitions et les propriétés de bases des hyperdéterminants, nous consacrons le chapitre 10 aux hyperdéterminants de Hankel. En particulier, on étudie le lien entre ces polynômes, les puissances du déterminant de Vandermonde et les polynômes de Jack. Nous montrons dans ce même chapitre, que la preuve de Selberg de son intégrale peut s'interpréter comme un calcul d'hyperdéterminant. Ce chapitre reproduit les résultats des articles [135, 136] ainsi que de trois articles en préparation [14, 21, 105]. Le chapitre 11 est consacré à la généralisation du théorème de Haukkanen donnée dans [130]. Enfin, le chapitre 12 traite des hyperpfaffiens et de leurs liens avec les intégrales itérées de type de Bruijn<sup>(3)</sup>.

---

<sup>(2)</sup>Les résultats sont issus des articles [135, 136].

<sup>(3)</sup>Ce chapitre reproduit les résultats de [132]





# Chapitre 9

## Propriétés générales

### 9.1 Définitions

Nous avons vu dans la première partie de ce mémoire, que l'espace des invariants de plus bas degré des hypermatrices de dimensions homogènes  $n$  est de dimension 1. Cet espace est engendré par un polynôme que nous nommerons *hyperdéterminant*. L'hyperdéterminant n'est alors défini qu'à un coefficient multiplicateur près.

Une façon alternative de le définir consiste à représenter les hypermatrices comme des tenseurs d'ordre  $m$

$$\mathbf{M} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n} M_{i_1 \dots i_m} \eta_{i_1} \otimes \dots \otimes \eta_{i_m},$$

où  $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_i, \dots\}$  est un ensemble de variables anti-commutatives (appelées aussi Grassmanniennes ou fermioniques [18]). La puissance  $n$ ième de  $M$  est proportionnelle à  $(\eta_1 \dots \eta_n)^{\otimes m}$  et le coefficient de proportionnalité est précisément  $n! \text{Det}(\mathbf{M})$ ,

$$\mathbf{M}^n = n! \text{Det}(\mathbf{M}) (\eta_1 \dots \eta_n)^{\otimes m}. \quad (9.1)$$

On peut déduire de cette définition que

1. Pour tout  $m$ ,

$$\text{Det}(\mathbf{M}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \mathfrak{S}_n} \text{signe}(\sigma_1) \dots \text{signe}(\sigma_m) \prod_{i=1}^n M_{\sigma_1(i) \dots \sigma_m(i)}, \quad (9.2)$$

où  $\mathfrak{S}_n$  désigne le groupe symétrique à  $n!$  éléments.

2. Le polynôme  $\text{Det}$  est un invariant de degré  $n$  pour l'action du groupe  $SL_n(\mathbb{C})^{\times m}$ . Un rapide calcul, se basant sur les formules présentées au paragraphe 4.2.1, montre que l'espace des invariants de degré  $n$  est engendré par un seul polynôme (qui est donc  $\text{Det}$ ) et qu'il n'existe pas d'invariant dont le degré est inférieur. La définition (9.1) est bien cohérente avec celle donnée au début de la section.
3. L'hyperdéterminant est nul lorsque  $m$  est impair. Ceci peut se voir aussi bien sur la formule 9.2 qu'à partir du calcul des dimensions des espaces d'invariants présenté au paragraphe 4.2.1.

Nous supposons que  $m = 2k$  est pair. Pour fixer les notations, nous nommerons  $\mathcal{M} = (M_{i_1, \dots, i_{2k}})_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n}$ , l'hypermatrice associée au tenseur  $\mathbf{M}$ . Nous passerons souvent de la notation tensorielle à la notation hypermatricielle ainsi nous écrirons

$$\text{Det}(\mathcal{M}) = \text{Det}(\mathbf{M}).$$

L'hyperdéterminant est un invariant relatif pour l'action de  $GL_n(\mathbb{C})^{\times 2k}$  définie par l'égalité (3.1) dont nous donnons une traduction en terme de tenseurs

$$\begin{aligned} (g^{(1)} \otimes \dots \otimes g^{(2k)}) \cdot \mathbf{M} &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_{2k} \leq n} M_{j_1 \dots j_{2k}} \times \\ &\times \sum_{i_1=1}^n g_{i_1 j_1}^{(1)} \eta_{j_1} \otimes \dots \otimes \sum_{i_{2k}=1}^n g_{i_{2k} j_{2k}}^{(2k)} \eta_{j_{2k}}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

On a donc

$$\text{Det}((g^{(1)} \otimes \dots \otimes g^{(2k)}) \cdot \mathbf{M}) = \det(g^{(1)}) \dots \det(g^{(2k)}) \text{Det}(\mathbf{M}). \quad (9.4)$$

## 9.2 Hyperdéterminant d'un produit

Si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont deux hypermatrices d'ordres respectifs  $k$  et  $k'$  et de dimension respective  $n^{\times k}$  et  $n^{\times k'}$ , leur produit est un tenseur d'ordre  $2(k + k' - 1)$  défini par

$$\mathcal{M} \cdot \mathcal{N} = \left( \sum_j M_{i_1 \dots i_{2k-1} j} N_{j i_{2k} \dots i_{2(k+k'-1)}} \right)_{0 \leq i_1, \dots, i_{2(k+k'-1)} \leq n-1}. \quad (9.5)$$

Afin de ne pas alourdir les notations, nous avons décidé de faire opérer le produit par rapport au dernier indice de  $\mathcal{M}$  et au premier indice de  $\mathcal{N}$ . Ce choix est purement arbitraire tout autre couple d'indices  $(i, j)$  aurait pu être utilisé. Cette définition se généralise aux hypermatrices dont les dimensions sont non-homogènes à la condition que la dimension de  $\mathcal{M}$  selon l'indice  $i$  soit la même que celle de  $\mathcal{N}$  selon l'indice  $j$ .

La propriété d'invariance (9.4) découle de la généralisation de l'identité de Binet-Cauchy aux hypermatrices. Cette relation a été démontrée dans le cadre plus général des polynômes *riciens* [117, 119]<sup>(1)</sup>. Ces polynômes admettent un développement quasi-similaire aux hyperdéterminants (9.2) mais admettant un certain nombre d'indices non-alternants. Binet et Cauchy ont montré que le produit de deux matrices rectangulaires est une matrice dont le déterminant est égal à une somme de produits de mineurs correspondants des deux facteurs.

Cette propriété a été d'abord étendue à une certaine classe d'hypermatrices par Gegenbauer<sup>(2)</sup>. Puis, Lecat a donné la formule générale dans [117] en 1926 mais sans la démonstration qu'il réservait pour une publication ultérieure. La première démonstration publiée est due à Rice [166] la même année<sup>(3)</sup>. Rice basa sa preuve sur la généralisation de la formule d'Albeggiani<sup>(4)</sup> qu'il a démontrée dans un de ses précédents articles [165]. Nous ne donnerons pas ici la formule de Binet-Cauchy généralisée car nous n'en aurons pas besoin dans ce mémoire<sup>(5)</sup>. Par contre nous utiliserons l'un de ses corollaires.

**Proposition 9** (*Rice-Lecat*) Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont deux hypermatrices homogènes de dimension  $n$  et d'ordre respectif  $k$  et  $k'$ . On a

$$\text{Det}(\mathcal{M}\mathcal{N}) = \text{Det}(\mathcal{M}) \text{Det}(\mathcal{N}). \quad (9.6)$$

---

<sup>(1)</sup>La théorie des riciens est due à L.H. Rice [164, 165, 166, 167] qui les appelait “*less than full sign determinant*”. Le terme de ricien est dû à Lecat [117, 119].

<sup>(2)</sup>D'après Rice [166], Gegenbauer a été le premier à donner une formule pour l'hyperdéterminant du produit de deux hypermatrices. Gegenbauer a publié une série d'articles sur les hyperdéterminants dont le premier [69] date de 1882.

<sup>(3)</sup>Rice explique dans l'introduction de [166] qu'il connaissait les résultats de Lecat mais qu'il avait besoin de la démonstration pour compléter ses preuves.

<sup>(4)</sup>La formule d'Albeggiani donne le développement d'une somme de  $m$  matrices comme une somme de produits de mineurs.

<sup>(5)</sup>Le lecteur pourra se référer à [166, 180, 181].

Cette propriété peut être aussi directement démontrée en utilisant le développement (9.2).

### 9.3 Développement de Laplace des hyperdéterminants

Le développement de Laplace généralisé est le corollaire d'un cas particulier de la formule d'Albeggiani généralisée due à Rice [165]. On peut aussi démontrer ce résultat en utilisant l'écriture tensorielle des hypermatrices, en développant l'expression  $(\mathbf{M} + \mathbf{N})^n$  où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  sont des tenseurs de dimension  $n^{(6)}$ .

Si  $I = (I_1, \dots, I_{2k})$  est un  $n$ -uplet de sous-ensembles de  $\{1, \dots, n\}$ , on appellera *hypermineur* (ou mineur pour simplifier) le tenseur  $\mathbf{M}[I]$  défini par

$$\mathbf{M}[I] = \sum_{i_1 \in I_1, \dots, i_{2k} \in I_{2k}} M_{i_1 \dots i_{2k}} \eta_{i_1} \otimes \dots \otimes \eta_{i_{2k}}. \quad (9.7)$$

Notons

$$\eta_I = \overrightarrow{\prod}_{i_1 \in I_1} \eta_{i_1} \otimes \dots \otimes \overrightarrow{\prod}_{i_{2k} \in I_{2k}} \eta_{i_{2k}}$$

où  $\overrightarrow{\prod}_i$  représente le produit non commutatif dirigé de façon croissante.

Notons aussi  $\mathfrak{C}_{n,k}^r$  l'ensemble des paires  $(I, J)$  de  $2k$ -uplets  $I = (I_1, \dots, I_{2k})$  et  $J = (J_1, \dots, J_{2k})$  tels que pour tout  $s \in \{1, \dots, 2k\}$ ,  $(I_s, J_s)$  soit une partition de  $\{1, \dots, n\}$  en un bloc de taille  $r$  et un autre de taille  $n - r$ . Le signe  $\text{signe}(I, J)$  d'une paire  $(I, J) \in \mathfrak{C}_{n,k}^r$  est le produit des signes des permutations  $\sigma_s = (i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{n-r})$  où  $I_s = \{i_1 < \dots < i_r\}$  et  $J_s = \{j_1 < \dots < j_{n-r}\}$ . Avec ces conventions, on a

**Théorème 10** [136]

$$\text{Det}(\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \sum_{r=0}^n \sum_{(I,J) \in \mathfrak{C}_{n,k}^r} \text{signe}(I, J) \text{Det}(\mathbf{M}[I]) \text{Det}(\mathbf{N}[J]) \quad (9.8)$$

---

<sup>(6)</sup>Le détail des calculs se trouve dans [136]).

On en déduit un analogue multi-dimensionnel du développement de Laplace (voir aussi l'article de Zappa [208]).

**Corollaire 11** (*Laplace généralisé*) On a

$$\text{Det}(M) = \sum_J \pm \text{Det}(M[J]) \text{Det}(M[\bar{J}]) \quad (9.9)$$

où la somme porte sur les familles  $J = (\{1, \dots, m\}, J_2, \dots, J_{2k})$  de sous-ensembles à  $m$  éléments de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\bar{J} = (\{m+1, \dots, n\}, \{1, \dots, n\} \setminus J_2, \dots, \{1, \dots, n\} \setminus J_{2k})$  et le signe  $\pm$  est celui du produit des permutations  $\sigma_i$  envoyant le mot formé par les éléments de  $J_i$  écrits dans l'ordre croissant et suivis des éléments de  $\bar{J}_i$  eux aussi dans l'ordre croissant sur  $12 \dots n$ .

En particulier

$$\text{Det}(\mathbf{M}) = \sum_{I=(i_1=1 \leq i_2, i_3, \dots, i_{2k} \leq n)} \text{signe}(I) M_{1, i_2, \dots, i_{2k}} \text{Det}(\mathbf{M}[\bar{I}]) \quad (9.10)$$

où  $\text{signe}(I) = (-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_k}$  et  $\bar{I} = (\{1, \dots, n\} \setminus i_1, \dots, \{1, \dots, n\} \setminus i_{2k})$

En conséquence, les hyperdéterminants de tenseurs triangulaires admettent une expression factorisée.

**Corollaire 12** Soit  $M$  un tenseur tel que  $M_{i_1 \dots i_{2k} \neq 0}$  implique  $i_2, \dots, i_{2k} \geq i_1$ . Alors,

$$\text{Det}(M) = \prod_i M_{i \dots i} \quad (9.11)$$

On peut aussi trouver ces résultats reproduits dans les livres de Sokolov [180, 181].

La formule (9.8) se généralise pour la somme d'un nombre quelconque  $m$  d'hypermatrices. C'est la généralisation du théorème d'Albegiani aux hyperdéterminants [166].

Notons,  $\mathfrak{J}_m^{n,k}$  l'ensemble des matrices  $A = (A_i^j)_{\substack{1 \leq i \leq 2k \\ 1 \leq j \leq m}}$  dont les entrées sont des ensembles d'entiers vérifiant

1. Les ensembles  $\{A_i^1, \dots, A_i^m\}$  sont des partitions de  $\{1, \dots, n\}$ .
2. Pour tout  $j$  fixé, les ensembles  $A_i^j$  ont le même nombre d'éléments.

On notera  $A^j = (A_i^j)_i$ . Le signe de  $A$  est

$$\text{signe}(J) = \prod_{p=1}^{2k} \text{signe}(A_p^1 \cdots A_p^m) \quad (9.12)$$

où  $A_p^1 \cdots A_p^m$  représente ici la permutation

$$a_1^1, \dots, a_{n_1}^1, \dots, a_1^m, \dots, a_{n_m}^m$$

avec  $A_i^j = \{a_1^j < \cdots < a_{n_j}^j\}$ .

Avec ces notations, en itérant la formule 9.8, on obtient

**Théorème 13** (*Albeggiani-Rice*) *On a*

$$\text{Det}(M^1 + \cdots + M^q) = \sum_{A \in \mathfrak{J}_m^{n,k}} \text{signe}(A) \prod_{j=1}^m \text{Det}(M^j[A^j]) \quad (9.13)$$

avec la convention  $\text{Det}(M[A]) = 1$  si il existe  $i$  tel que  $A_i = \emptyset$ .

En fait, dans [166] cette formule est donnée pour les riciens.

# Chapitre 10

## Hyperdéterminants de Hankel

### 10.1 Introduction

Alors que les hyperdéterminants sont connus depuis le 19<sup>ième</sup> siècle, le cas particulier des hyperdéterminants de Hankel, dont les entrées ne dépendent que de la somme des indices a été très peu étudié. On les retrouve mentionnés dans les travaux de Lecat sous le nom de déterminants *orthosymétriques* ou *persymétriques*. Dans [118], Lecat donne quelques propriétés générales et s'intéresse au cas particulier de matrices qu'il nomme *circulantes* dont les entrées dépendent de la somme des indices modulo  $2k$ . On trouve aussi dans la littérature mathématique quelques calculs faisant intervenir ces objets sans les identifier. Le cas de l'intégrale de Selberg est instructif. En 1944, Selberg [176] proposa une preuve de son intégrale reposant sur l'examen des coefficients apparaissant dans le développement des puissances paires du Vandermonde. Cette preuve est reproduite dans [147]. Une lecture attentive nous permet d'interpréter chaque étape de sa preuve à l'aide d'hyperdéterminants. En particulier, dans [135, 136], nous avons montré que l'intégrale de Selberg est un hyperdéterminant. C'est le développement d'une puissance paire du Vandermonde qui est au coeur de son calcul. Or c'est précisément ce développement qui permet d'étudier les hyperdéterminants de Hankel. De façon plus explicite, les puissances paires du Vandermonde sont les images "*ombrales*" d'hyperdéterminants de Hankel. Il s'agit de la généralisation multidimensionnelle d'une célèbre identité due à Heine [80] permettant d'écrire une intégrale multiple comme le déterminant de Hankel associé aux moments de sa mesure. De multiples extensions de l'intégrale de Selberg ont depuis été propo-



sées et certaines d'entre-elles<sup>(1)</sup> admettent une forme hyperdéterminantale. Si le développement des puissances paires du Vandermonde dans la base des fonctions symétriques monomiales permet de comprendre les hyperdéterminants de Hankel, Di Francesco et al. [45] ont montré que son développement dans la base des fonctions de Schur tient une place importante dans la théorie de l'effet de Hall quantique fractionnaire[115]. Son développement dans d'autres bases de fonctions symétriques possède aussi des propriétés remarquables. Dans des articles en cours de rédaction [14, 21, 105], nous montrons que ce polynôme est un polynôme de Jack [93, 94] escalier ou rectangle mais évalué sur l'alphabet opposé. Les polynômes de Jack interviennent aussi directement dans la théorie des hyperdéterminants de Hankel. Dans un article récent, Matsumoto [146] a montré qu'un hyperdéterminant de Hankel est un polynôme de Jack rectangle pour un certain alphabet. Dans [14], nous étendons cette propriété à certains hyperdéterminants plus généraux appelés *Hankel décalés*. Les polynômes de Jack sont intimement liés aux généralisations de l'intégrale de Selberg. En effet, l'intégrale de Kaneko s'évalue comme une fonction hypergéométrique multivariée associée aux polynômes de Jack [61, 95, 103, 106, 107, 108]. Ces égalités nous permettent d'exprimer certains hyperdéterminants de Hankel dont les entrées sont des polynômes orthogonaux classiques [135].

Ce chapitre est structuré de la façon suivante. Dans un premier temps (section 10.2), nous donnons les définitions des hyperdéterminants de Hankel et de Toëplitz. Dans la section 10.3, nous revisitons la preuve de Selberg de son intégrale [176] en remarquant que les arguments qu'il a développés peuvent être interprétés en termes d'hyperdéterminants. La section 10.4 est consacrée à des exemples de calculs d'hyperdéterminants de Hankel liés à l'intégrale de Selberg. Les liens entre hyperdéterminants de Hankel et polynômes de Jack sont étudiés dans la section 10.5.

## 10.2 Généralités

### 10.2.1 Définitions et premières propriétés

Si  $I = (i_1, \dots, i_{2k})$ , on notera  $|I| = i_1 + \dots + i_{2k}$ .

---

<sup>(1)</sup>Par exemple l'intégrale d'Aomoto [6, 12], l'intégrale de Kaneko [95] ou plus généralement les intégrales de type Hua [103].

Une *hypermatrice de Hankel* est une hypermatrice dont les entrées dépendent uniquement de la somme des indices (*i.e.*  $M_{i_1, \dots, i_{2k}} = N_{|I|}$ ). Un *hyperdéterminant de Hankel* est l'hyperdéterminant d'une hypermatrice de Hankel.

Considérons l'hyperdéterminant

$$\mathcal{H}_{n,k} = \text{Det} (X_{i_1 + \dots + i_{2k}}). \quad (10.1)$$

Si on développe ce polynôme, on s'aperçoit que seulement certains monômes apparaissent avec un coefficient non nul.

**Proposition 14** *On a*

$$\mathcal{H}_{n,k} = \sum_{\lambda}' c_{\lambda}^{n,k} X_{\lambda_1} \cdots X_{\lambda_n}, \quad (10.2)$$

où le ' signifie que la somme est réalisée pour tous les  $n$ -uplets  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  tels que  $|\lambda| = kn(n-1)$  et tels que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on ait l'encadrement  $(i-1)k \leq \lambda_i \leq k(n+i-2)$ .

La preuve de cette affirmation se trouve dans [135] et un cas particulier apparaît dans la preuve originale de Selberg de son intégrale [147, 176]. Les coefficients des monômes apparaissant dans ce développement sont notoirement difficiles à calculer car ils sont liés aux développements des puissances paires du Vandermonde (nous verrons pourquoi plus loin). Néanmoins, il est possible de calculer certains d'entre eux. Remarquons tout d'abord que, si l'on note  $\mathfrak{d}_{n,k}$  le coefficient de  $X_{k(n-1)}^n$  dans (10.2) (*i.e.*  $\mathfrak{d}_{n,k} := c_{(k(n-1))^n}^{n,k}$ ), le fait de poser  $X_i = 0$  pour  $i > k(n-1)$  implique

$$\text{Det} (X_{i_1 + \dots + i_{2k}}) = \mathfrak{d}_{n,k} X_{k(n-1)}^n. \quad (10.3)$$

Pour calculer une expression close de  $\mathfrak{d}_{n,k}$ , nous avons besoin d'un cas particulier d'une célèbre identité impliquant un terme constant : La conjecture de Dyson<sup>(2)</sup> :

$$\text{T.C.} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^{a_i} = \begin{pmatrix} a_1 + \dots + a_n \\ a_1, \dots, a_n \end{pmatrix}, \quad (10.4)$$

---

<sup>(2)</sup>Il s'agit d'une formule conjecturée par Dyson [51] en 1962 et prouvée par Gunson [76] et Wilson [206] la même année, indépendamment. En 1970, I. J. Good en donna une élégante preuve combinatoire basée sur l'interpolation de Lagrange [70]

où T.C. désigne *terme constant*. Le cas qui va nous être utile est celui pour lequel tous les  $a_i$  sont égaux à  $k$  (rappelons que l'on considère des tenseurs avec  $2k$  indices). Posons

$$\mathcal{C}_{n,k} = \text{T.C.} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^k. \quad (10.5)$$

En remarquant que

$$\prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^k = (-1)^k \Delta(x)^{2k} \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i^{k(n-1)}} \quad (10.6)$$

et en développant la puissance du Vandermonde, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{n,k} &= (-1)^k \text{T.C.} \left\{ \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_{2k} \in \mathfrak{S}_n} \text{signe}(\sigma_1) \cdots \text{signe}(\sigma_{2k}) \prod_{i=1}^n x_i^{\sigma_1(i) + \dots + \sigma_{2k}(i) - 2k - k(n-1)} \right\} \\ &= (-1)^k n! \text{Det}(\delta_{i_1 + \dots + i_{2k}, n}) \end{aligned} \quad (10.7)$$

où  $\delta$  désigne le symbole de Kronecker.

Enfin, on en déduit la proposition suivante en utilisant (10.3) et (10.4).

**Proposition 15**

$$\mathfrak{d}_{n,k} = (-1)^k \frac{1}{n!} \binom{kn}{k, \dots, k}. \quad (10.8)$$

Plus généralement, on peut écrire le coefficient  $c_\lambda^{n,k}$  comme la somme

$$c_\lambda^{n,k} = \frac{(-1)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}}}{m_\lambda} \left( \sum_{M \in \mathcal{M}_n^{2k}(\lambda)} (-1)^{\sum_{0 < i < j < n} M_{i,j}} \prod_{0 < i < j < n+1} \binom{2k}{M_{i,j}} \right),$$

où  $m_\lambda = m_1! \cdots m_p!$  si  $\lambda = (k_1^{m_1} \cdots k_p^{m_p})$  et  $\mathcal{M}_n^p(\lambda)$  désigne l'ensemble des matrices anti-symétriques carrées  $M$  de dimension  $n$  telles que si  $i < j$  alors  $0 \leq M_{ij} \leq p$  et  $\sum_{j=1}^n M_{ij} = \lambda_i - (i-1)p$ .

Considérons maintenant, une famille de  $m$ -uplets ( $m \leq n$ )  $J = (J^1, \dots, J^{2k})$ . Le développement du mineur  $\mathbf{M}[J]$  possède une propriété analogue à l'égalité (10.2).

**Proposition 16**

$$\text{Det}(M[J]) = \sum_{\tilde{\lambda}} c_{\tilde{\lambda}}^{n,k;J} \prod_{i=1}^m \tilde{M}_{\tilde{\lambda}_i} \quad (10.9)$$

où  $k(i-1) \leq \tilde{\lambda}_i \leq k(2n-m+i-2)$ .

Le lecteur trouvera des détails supplémentaires dans [136].

### 10.2.2 Hyperdéterminants et puissances paires du Vandermonde

Le principe utilisé dans le calcul (10.7) est général. En effet, si on considère la fonctionnelle

$$\int : x_i^p \rightarrow X_p$$

substituant le symbole  $X_p$  à chaque occurrence d'une puissance  $x_i^p$  d'une lettre de l'alphabet  $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ , on peut écrire l'hyperdéterminant de Hankel comme l'image d'une puissance du déterminant de Vandermonde  $\Delta(\mathbb{X}) := \det(x_j^{i-1}) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ .

**Théorème 17** On a

$$\int \Delta(\mathbb{X})^{2k} = n! \mathcal{H}_{n,k}. \quad (10.10)$$

Bien que sa preuve soit vraiment très simple <sup>(3)</sup>, cette égalité est centrale dans la théorie des hyperdéterminants de Hankel. Elle permet de considérer les puissances paires du Vandermonde comme des *ombres* d'hyperdéterminants. De nombreuses propriétés en découlent.

Pour illustrer ce principe, voici une application qui lie les hyperdéterminants et certaines intégrales itérées. Pour l'obtenir, il suffit de considérer  $\int$  comme une “vraie” intégrale.

Soit  $\mu$  une mesure (sur la droite réelle) et  $c_n = \int x^n d\mu(x)$  ses moments. Il est bien connu que l'intégrale de Heine ([80]) peut être évaluée comme un déterminant

$$\int \cdots \int \Delta(x)^2 d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_n) = n! \det(c_{i+j})_{i,j \in \{0 \dots n-1\}}. \quad (10.11)$$

---

<sup>(3)</sup>Il suffit de développer la puissance du Vandermonde écrit comme un déterminant en suivant le modèle de (10.7).

Cette égalité se montre facilement en développant le carré du Vandermonde<sup>(4)</sup>.

L'identité de Heine peut se généraliser aux puissances paires du Vandermonde.

**Corollaire 18** [135] *L'intégrale*

$$\mathcal{I}_{n,k}^\mu = \int \cdots \int \Delta(x_1, \dots, x_n)^{2k} d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_n) \quad (10.12)$$

est égale à l'hyperdéterminant de Hankel des moments associés à la mesure  $\mu$ .

Plus explicitement, on a

$$\mathcal{I}_{n,k}^\mu = n! \text{Det} \left( c_{|I|} \right)_{I \in \{0 \dots n-1\}^{2k}}. \quad (10.13)$$

### 10.3 Une preuve hyperdéterminantale de l'intégrale de Selberg

La première application de la formule de Heine généralisée consiste à donner une preuve purement combinatoire de l'identité de Selberg [176]

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n(a, b; \gamma) &:= \int_0^1 \cdots \int_0^1 |\Delta(x_1, \dots, x_n)|^{2\gamma} \prod_{i=1}^n x_i^{a-1} (1-x_i)^{b-1} dx_i \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(a+j\gamma)\Gamma(b+j\gamma)\Gamma((j+1)\gamma+1)}{\Gamma(a+b+(n+j-1)\gamma)\Gamma(\gamma+1)}. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Cette formule est valide, lorsqu'elle est définie, pour tout  $\gamma$  complexe. Néanmoins, la première étape de sa preuve consiste à traiter le cas où  $\gamma = k \in \mathbb{N}$  et de prolonger le résultat à l'aide du théorème de Carlson (voir [147] par exemple).

Le théorème de Heine généralisé (10.13) appliqué à la distribution Beta permet d'écrire l'intégrale de Selberg comme un hyperdéterminant de Hankel.

**Proposition 19** *On a*

$$\mathcal{S}_n(a, b; k) = n! \text{Det} \left( \mathbf{S}_n(a, b; k) \right), \quad (10.15)$$

---

<sup>(4)</sup>On peut aussi la montrer en la considérant comme un cas particulier de l'identité de de Bruijn [44].

où

$$\mathbf{S}_n(a, b; k) := \sum_{0 \leq i_1, i_2, \dots, i_{2k} \leq n-1} B(a + |I|, b) \eta_I \quad (10.16)$$

et  $B(a, b)$  est la fonction  $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$ .

Remarquons que l'intégrale de Selberg est symétrique en  $a$  et  $b$ . Cette symétrie n'apparaît pas dans sa forme hyperdéterminantale (10.15). Pour la mettre en évidence, considérons le tenseur

$$\mathbf{S}_n^{Sym}(a, b; k) = \sum_{I, J \in \{0, \dots, n-1\}^k} B(a + |I|, b + |J|) \eta_I \otimes \eta_J. \quad (10.17)$$

Celui-ci s'obtient à partir de  $\mathbf{S}_n(a, b; k)$  en agissant par un certain élément de  $GL_n^{2k}$  :

$$\mathbf{S}_n(a, b; k) = (\overbrace{\mathbf{I}, \dots, \mathbf{I}}^k, \overbrace{g, \dots, g}^k) \cdot \mathbf{S}_n^{Sym}(a, b; k) \quad (10.18)$$

où  $\mathbf{I}$  désigne la matrice identité et  $g$  la matrice  $n \times n$

$$g = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (-1)^j \binom{i}{j} \eta_i \otimes \eta_j. \quad (10.19)$$

Comme  $\det(g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ , la propriété d'invariance donne alors

### Proposition 20

$$\text{Det}(\mathbf{S}_n^{Sym}(a, b; k)) = (-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}} \text{Det}(\mathbf{S}_n(a, b; k)). \quad (10.20)$$

Nous avons maintenant tous les outils en main pour montrer l'égalité de Selberg de façon combinatoire. En fait, il ne s'agit pas à proprement parler d'une preuve nouvelle. L'ensemble des étapes de la preuve originale de Selberg peut être interprété en utilisant des propriétés des hyperdéterminants. Nous n'allons qu'esquisser la démonstration<sup>(5)</sup>.

---

<sup>(5)</sup>Le lecteur voulant approfondir la question peut se procurer la preuve détaillée dans l'article [136].

En développant l'hyperdéterminant de l'expression (10.15) et en utilisant les propriétés du développement des hyperdéterminants de Hankel (10.2), on montre que

$$\text{Det}(\mathbf{S}_n(a, b; k)) = \frac{Q(a, b)}{R(b)} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma(a + jk)\Gamma(b + jk)}{\Gamma(a + b + (n + j - 1)k)}$$

où  $Q(a, b)$  est un polynôme de degré au plus  $kn(n-1)/2$  et  $R(b)$  est un polynôme de degré  $kn(n-1)/2$ . Or la symétrie en  $a$  et  $b$  (10.20) implique  $\text{Det}(\mathbf{S}_n(a, b; k)) = \text{Det}(\mathbf{S}_n(b, a; k))$  et donc  $\frac{Q(a, b)}{R(b)} = \frac{Q(b, a)}{R(a)}$ . Il en découle que  $\alpha_{n, k} = \frac{Q(a, b)}{R(b)}$  est un scalaire indépendant de  $a$  et  $b$ . D'où

$$\text{Det}(\mathbf{S}_n(a, b; k)) = \alpha_{n, k} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma(a + jk)\Gamma(b + jk)}{\Gamma(a + b + (n + j - 1)k)} \quad (10.21)$$

Dans la seconde partie de sa preuve, Selberg établit une relation de récurrence afin de calculer  $\alpha_{n, k}$ . Ce calcul peut lui aussi être interprété dans le langage des hyperdéterminants.

En effet, considérons la limite

$$L_{b; k, n} = \lim_{a \rightarrow 0^+} a \text{Det}(\mathbf{S}_n(a, b; k)) \quad (10.22)$$

Un rapide calcul montre que

$$L_{b; k, n} = \text{Det}(\mathbf{T}) \quad (10.23)$$

où

$$\mathbf{T} = \eta_0 \otimes \cdots \otimes \eta_0 + \sum_{I \in \{1, \dots, n-1\} \times \{0, \dots, n-1\}^{2k-1}} B(|I|, b) \eta_I. \quad (10.24)$$

En développant  $L_{b; k, n}$  en suivant la règle de Laplace généralisée appliquée au le premier indice (9.10), on trouve

$$L_{b; k, n} = \text{Det}(\mathbf{S}_{n-1}(1, b; k)). \quad (10.25)$$

Cette identité permet d'établir la relation de récurrence  $\alpha_{n, k} = \frac{(nk)!}{n!} \alpha_{n-1, k}$  et prouve le théorème de Selberg.

**Théorème 21**

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_n(a, b; \gamma) &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 |\Delta(x)|^{2\gamma} \prod_{i=1}^n x_i^{a-1} (1-x_i)^{b-1} dx_i \\
&= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(a+j\gamma)\Gamma(b+j\gamma)\Gamma((j+1)\gamma+1)}{\Gamma(a+b+(n+j-1)\gamma)\Gamma(\gamma+1)}. \quad (10.26)
\end{aligned}$$

Dans [136], nous donnons une fin alternative à la démonstration qui utilise la conjecture de Dyson. La preuve décrite dans ce paragraphe peut être adaptée à l'intégrale, plus générale, d'Aomoto [6]

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n^{a,b;k}(y) &:= \int_{[0,1]^n} \Delta(x)^{2k} \prod_{i=1}^n (y-x_i) x_i^{a-1} (1-x_i)^{b-1} dx_1 \cdots dx_n \\
&= (-2)^{-n} S_n(a, b; k) P_n^{\frac{a}{k}-1, \frac{b}{k}-1}(1-2y). \quad (10.27)
\end{aligned}$$

où  $P_n^{a,b}$  est un polynôme de Jacobi. Le détail des calculs se trouve dans [136] et utilise les propriétés des mineurs d'hyperdéterminants de Hankel (en particulier l'égalité 10.9).

## 10.4 Exemples d'hyperdéterminants de Hankel

Dans cette section, nous noterons ([135])

$$D_{n,r}^{(k)}(c) = \text{Det}(c_{i_1+\dots+i_{2k}+r})_{0 \leq i_p \leq n-1}, \quad (10.28)$$

ainsi que  $D_n^{(k)}(c) = D_{n,0}^{(k)}(c)$ , afin de simplifier les écritures. L'idée directrice consiste à identifier les  $c_n$  à des moments  $c_n = \int x^n d\mu(x)$  pour une mesure  $\mu$  à déterminer, d'écrire les hyperdéterminants comme des intégrales connues en utilisant le théorème de Heine généralisé et de les évaluer en utilisant des variantes de l'intégrale de Selberg [6, 176, 103, 95]. Le tableau 10.1 contient quelques exemples impliquant des nombres combinatoires dont les représentations intégrales sont connues (voir [135] pour le détail des calculs). La représentation intégrale des nombres de Catalan et des coefficients binomiaux centraux est due à Penson et Sixdeniers [160].



$c_n$	$d\mu(x)$	$D_{n,r}^{(k)}(c)$
$n!$	$\mathbf{1}_{[0,\infty)} e^{-x} dx$	$\frac{1}{n!k!^n} \prod_{j=0}^{n-1} (k+jk)! (r+jk)!$
$\Gamma(\alpha + n + 1)$	$\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) x^\alpha e^x dx$	$\frac{1}{n!k!^n} \prod_{j=0}^{n-1} (k+jk)! \Gamma(\alpha + 1 + jk + r)$
Catalan	$\mathbf{1}_{[0,4]} \sqrt{\frac{4-x}{4\pi^2 x}} dx$	$\frac{2^{2kn(n-1)+n(2r+1)}}{n!\pi^n} \mathcal{S}_n(r + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; k)$
$\binom{2n}{n}$	$\mathbf{1}_{[0,4]}(x) \frac{\sqrt{x(4-x)}}{\pi} dx$	$\frac{4^{kn(n-1)+nr}}{n!\pi^n} \mathcal{S}_n(r + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k)$
$\frac{(2 I )!}{ I !}$	$\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \frac{x^{-1/2} e^{-x/4}}{2\sqrt{\pi}}$	$\prod_{j=0}^{n-1} \frac{2^{3j+r}}{k(j+1)} (k(1+j))! (2(kj+r)-1)!$
$\frac{1}{ I +1}$	$\mathbf{1}_{[0,1]}$	$\frac{1}{n!} \mathcal{S}_n(1+r, 1; k) \text{ si } r \geq 0$

TAB. 10.1 – Quelques hyperdéterminants de Hankel  $D_{n,r}^{(k)}(c)$ .

Les *hyperturàniens* [135] sont des hyperdéterminants dont les entrées sont des polynômes orthogonaux. Plus précisément, pour toute famille de polynômes  $(Q_n(x))_n$ , on définit l'hyperturàrien<sup>(6)</sup>

$$T_n^k(Q) := \text{Det}(Q_{i_1+\dots+i_{2k}}).$$

En utilisant, la forme intégrale de certains polynômes orthogonaux, on peut écrire l'hyperturàrien comme une intégrale de type Selberg. En particulier, dans [135], nous traitons le cas des polynômes de Legendre, Laguerre, Hermite, Charlier, Meixner et Krawtchouk.

## 10.5 Hyperdéterminants de Hankel et polynômes de Jack

### 10.5.1 Polynômes de Jack

Les polynômes de Jack sont des déformations à un paramètre, noté  $\alpha$  dans ce mémoire, des fonctions symétriques de Schur. Ils ont été définis par Jack [93, 94] dans le but d'interpoler entre les fonctions de Schur ( $\alpha = 1$ )

<sup>(6)</sup>La notion de turàrien est due à Karlin et Szegö [96] (voir aussi [121]).

et les polynômes zonaux ( $\alpha = 2$ ). Nous rappelons ici quelques définitions et propriétés les concernant.

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ , et considérons la déformation  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$  du produit scalaire usuel des fonctions symétriques défini par

$$\langle \Phi^\lambda, \Phi^\mu \rangle_\alpha = \delta_{\mu, \lambda} \prod_i i^{m_i} m_i! \alpha^{l(\lambda)} \quad (10.29)$$

où  $\Phi^\lambda = \Phi_{\lambda_1} \dots \Phi_{\lambda_n}$  est une fonction “somme de puissances” et  $m_i$  représente le nombre de parts de  $\lambda$  égales à  $i$ . Les polynômes de Jack  $P_\lambda^{(\alpha)}$  forment l’unique famille de polynômes symétriques orthogonaux pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$  de la forme

$$P_\lambda^{(\alpha)} = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} u_{\lambda\mu}^{(\alpha)} m_\mu,$$

où les  $m_\mu$  désignent des fonctions symétriques monomiales et l’ordre apparaissant dans la somme est l’ordre de dominance sur les partitions [138]. On notera par  $(Q_\lambda^{(\alpha)})_\lambda$  la base duale de  $(P_\lambda^{(\alpha)})_\lambda$  pour le produit scalaire déformé. Les polynômes  $P_\lambda^{(\alpha)}$  et  $Q_\lambda^{(\alpha)}$  sont proportionnels. Le coefficient de proportionnalité  $b_\lambda^{(\alpha)} := \langle P_\lambda^{(\alpha)}, P_\lambda^{(\alpha)} \rangle_\alpha^{-1}$  est explicitement calculé dans [138] VI.10.

Soit  $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$  un alphabet fini et soit  $\mathbb{X}^\vee$  l’alphabet des inverses  $\{x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}\}$ . Les polynômes  $P_\lambda^\alpha$  et  $Q_\lambda^\alpha$  sont aussi orthogonaux pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle'_{n, \alpha} = \frac{1}{n!} \text{T.C.} \{f(\mathbb{X})g(\mathbb{X}^\vee) \prod_{i \neq j} (1 - x_i x_j^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}\}, \quad (10.30)$$

voir [138] VI. 10.

Deux autres normalisations des polynômes de Jack  $(J_\lambda^{(\alpha)})_\lambda$  et  $(C_\lambda^{(\alpha)})_\lambda$  sont définies par

$$\langle J_\lambda^{(\alpha)}, J_\mu^{(\alpha)} \rangle_\alpha = \delta_{\mu, \lambda} j_\lambda^{(\alpha)}.$$

et

$$C_\lambda^{(\alpha)} = \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)! \alpha^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}}{j_\lambda^{(\alpha)}} J_\lambda^{(\alpha)}$$

où

$$j_\lambda^{(\alpha)} = \prod_{(i, j) \in \lambda} (\lambda_j^\perp - i + \alpha(\lambda_i - j + 1))(\lambda_j^\perp - i + 1 + \alpha(\lambda_i - j))$$

si  $\lambda^\perp$  est la partition conjuguée de  $\lambda$  et  $(i, j)$  désigne une case du diagramme de Young de  $\lambda$ .

### 10.5.2 Polynômes de Jack quasi-rectangulaires

Pour tout vecteur  $v = (v_0, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ , nous considérons l'hyperdéterminant

$$\mathfrak{H}_v^k = \text{Det} \left( \Lambda^{i_1 + \dots + i_{2k} + v_{i_1}} \right)_{0 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n-1}$$

où  $\Lambda^n$  désigne une fonction symétrique élémentaire. Lorsque  $v = (0^n)$  est le vecteur nul, ce polynôme est un hyperdéterminant de Hankel. Dans le cas contraire, nous l'appellerons hyperdéterminant de Hankel *décalé*. Néanmoins, le principe détaillé dans le paragraphe 10.2.2 peut être adapté. Soit  $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$  un alphabet de taille  $n$ . Considérons la fonctionnelle  $\int_{\mathbb{Y}} : x_i^p \rightarrow \Lambda^p(\mathbb{Y})$  remplaçant chaque occurrence d'une puissance d'une lettre de l'alphabet  $\mathbb{X}$  par une fonction élémentaire sur l'alphabet  $\mathbb{Y}$ . En utilisant la forme déterminantale des fonctions de Schur [112, 138], un rapide calcul montre le résultat suivant.

**Proposition 22** *Un hyperdéterminant de Hankel décalé est l'image par  $\frac{1}{n!} \int_{\mathbb{Y}}$  du produit d'une fonction de Schur et d'une puissance paire du Vandermonde*

$$\mathfrak{H}_v^k(\mathbb{Y}) = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{Y}} S_{\text{renverse}(v)}(\mathbb{X}) \Delta(\mathbb{X})^{2k}$$

où  $\text{renverse}(v) = (v_n, \dots, v_1)$  si  $v = (v_1, \dots, v_n)$ .

Remarquons que la Proposition 22 donne un algorithme récursif (via la formule de Laplace) permettant de calculer les coefficients du développement d'une puissance paire du Vandermonde dans la base des fonctions de Schur (voir Annexe D).

Pour des raisons de commodité de calcul, nous considérerons aussi la version Toëplitz définie par Matsumoto [146] dans sa version décalée

$$\mathfrak{T}_v^k = \text{Det} \left( \Lambda^{i_1 + \dots + i_k - i_{k+1} - \dots - i_{2k} + v_{i_1}} \right).$$

Les hyperdéterminants de Toëplitz et ceux de Hankel sont liés par la relation

$$\mathfrak{H}_v^k = (-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}} \mathfrak{T}_{v+(k(n-1))n}^k.$$

Considérons le terme constant

$$I_{n,k}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{n!} \text{T.C.} \{ \Lambda^n(\mathbb{X}^\vee)^{p+k(n-1)} \Lambda^l(\mathbb{X}^\vee) \prod (1 + x_i y_j) \Delta(\mathbb{X})^{2k} \}.$$

Il s'agit d'une fonction symétrique sur l'alphabet  $\mathbb{Y}$  que nous évaluons de deux façons différentes dans un article en cours de rédaction [14]. Le premier calcul consiste à utiliser les propriétés du produit scalaire  $\langle, \rangle_{n,\alpha}$ . En remarquant que le produit des fonctions élémentaires apparaissant dans le terme constant est un polynôme de Jack ,

$$\Lambda^n(\mathbb{X}^\vee)^p \Lambda^l(\mathbb{X}^\vee) = P_{(p+1)^l p^{n-l}}^{(1/k)}(\mathbb{X}^\vee)$$

et que

$$\prod (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda} Q_{\lambda}^{(1/k)}(\mathbb{X}) Q_{\lambda'}^{(k)}(\mathbb{Y}),$$

l'orthogonalité des polynômes de Jack pour le produit scalaire  $\langle, \rangle_{n,\alpha}$  permet de prouver que la fonction symétrique  $I_{n,k}(\mathbb{Y})$  et le polynôme de Jack *quasi-rectangle*  $Q_{npl}^{(k)}(\mathbb{Y})$  sont proportionnels.

Le second calcul consiste à utiliser la proposition 22, en remarquant que  $\int_{\mathbb{Y}} x^m = \text{T.C.}\{x^{-m} \prod (1 + x_i y_j)\}$ . On montre alors que  $I_{n,k}(\mathbb{Y})$  est un hyperdéterminant de Toëplitz décalé.

On en déduit la propriété suivante

**Proposition 23** *Le polynôme de Jack quasi-rectangle  $Q_{npl}^{(k)}$  et l'hyperdéterminant de Toëplitz  $\mathfrak{T}_{p^{n-l}(p+1)^l}^k$  sont proportionnels.*

Les détails du calcul ainsi que le coefficient de proportionnalité sous forme explicite seront donnés dans [14].

Lorsque  $l = 0$ , la proportionnalité entre un polynôme de Jack rectangle et un hyperdéterminant de Toëplitz a été prouvée par Matsumoto dans [146] et peut être déduite de la proposition 23.

**Proposition 24** (Matsumoto) *On a*

$$P_{n^p}^{(k)} = n! \left( \begin{matrix} kn \\ k, \dots, k \end{matrix} \right)^{-1} \mathfrak{T}_{p^n}.$$

### 10.5.3 Puissances paires du Vandermonde

Les puissances paires du Vandermonde tiennent une place importante dans la théorie de l'effet de Hall fractionnaire quantique. Laughlin [115] a décrit ce dernier à l'aide d'une fonction d'onde dont l'expression fait apparaître une puissance paire du Vandermonde. Un des nombreux problèmes

rencontrés dans ce contexte concerne le développement du carré (ou plus généralement d'une puissance paire quelconque) du Vandermonde dans la base des fonctions de Schur [45, 100, 169]. Dans [100, 169], il est montré que le développement du  $q$ -discriminant

$$\Delta_q(\mathbb{X}) = \prod_{i \neq j} (qx_i - x_j)$$

est plus pertinent. Plus généralement, nous nous intéressons à l'expression du polynôme

$$\mathcal{D}_k(\mathbb{X}; q) = \prod_{l=1}^k \Delta_{q^{2l-1}}(\mathbb{X})$$

dans différentes bases de fonctions symétriques.

Dans un article en cours de rédaction [21], nous montrons que ce polynôme est un polynôme de Macdonald <sup>(7)</sup> escalier.

**Théorème 25** *On a*

$$\mathcal{D}_k(\mathbb{X}; q) = (-q)^{\frac{k^2 n(n-1)}{2}} P_{2k(n-1), 2k(n-2), \dots, 0}(\mathbb{X}; q^{-2}, q^{2k-1}) \quad (10.31)$$

où  $(P_\lambda(\mathbb{X}; q, t))_\lambda$  désigne la famille de polynômes de Macdonald [138] orthogonale pour le produit scalaire

$$\langle \Phi^\lambda, \Phi^\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda,\mu} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1 - q^{\lambda_i}}{1 - t_i^{\lambda_i}}$$

et vérifiant

$$P_\lambda(\mathbb{X}; q, t) = m_\lambda(\mathbb{X}) + \sum_{\mu < \lambda} u_{\lambda,\mu}(q, t) m_\mu(\mathbb{X}).$$

La preuve de ce théorème sera rédigée dans [21] et est basée sur le calcul des valeurs propres de l'opérateur de Macdonald  $\mathcal{M}_1$  [110] pour la spécialisation  $t = q^{-2}$  et  $q = q^{2k-1}$ . On montre que les espaces propres de  $\mathcal{M}_1$  sont de dimension 1 et que chacun d'eux admet un polynôme de Macdonald comme générateur. Or un calcul, qui ne sera pas reproduit ici, montre

---

<sup>(7)</sup> Les polynômes de Macdonald sont des déformations à deux paramètres  $(q, t)$  des fonctions de Schur qui se spécialisent en les polynômes de Jack lorsque l'on pose  $q = t^\alpha$  et que l'on fait tendre  $t$  vers 1 (voir [138]).

que le polynôme  $\mathcal{D}_k(\mathbb{X}; q)$  est une fonction propre de  $\mathcal{M}_1$ . L'identification de  $\mathcal{D}_k(\mathbb{X}; q)$  avec le polynôme de Macdonald escalier se prouve en calculant sa valeur propre. Le coefficient de proportionnalité est calculé en évaluant le coefficient de la fonction monomiale  $m_{2k(n-1), 2k(n-2), \dots, 0}$  dans le développement de  $\mathcal{D}_k(\mathbb{X}; q)$ .

Le développement des puissances paires du Vandermonde dans la base des fonctions monomiales permet aussi d'obtenir, via le théorème 17, les coefficients  $c_\lambda^{n,k}$  (10.2) intervenant dans le développement d'un hyperdéterminant de Hankel. En effet, du théorème 25 découle la proportionnalité entre une puissance paire du Vandermonde et un polynôme de Jack escalier. Or la formule de Pieri des polynômes de Jack permet d'exprimer leurs coefficients dans la base des fonctions monomiales comme des sommes de certaines fractions rationnelles sur des tableaux semi-standard (voir [138] pour les détails). En appliquant ce principe, nous pouvons donner une expression des coefficients d'une puissance paire du Vandermonde dans son développement sur la base des fonctions monomiales. Enfin, les puissances du Vandermonde étant les *ombres* des hyperdéterminants de Hankel (cf paragraphe 10.2.2), nous obtenons une expression du développement de ces derniers sur les entrées des hypermatrices. Le détail de ce calcul se trouvera dans [21].

Indépendamment, on peut montrer que les puissances paires du Vandermonde sont des polynômes de Jack rectangles évalués sur l'alphabet  $-\mathbb{X}$ .

**Proposition 26** *On a*

$$\Delta(\mathbb{X})^{2k} = \frac{-1^{\frac{kn(n-1)}{2}}}{n!} \binom{(k+1)n}{k+1, \dots, k+1} P_{n^{(n-1)k}}^{(k+1)}(-\mathbb{X}).$$

La preuve de cette proposition se trouvera dans [21] et est une conséquence de l'identité Matsumoto (proposition 24). Elle peut être aussi considérée comme le corollaire d'un résultat plus général sur les polynômes de Macdonald qui sera développé dans un article en cours de rédaction [105].

**Proposition 27** *Si  $\lambda = \mu + [((k-1)(n-1))^n]$ . Les polynômes de Macdonald  $P_\lambda\left(\frac{1-q}{1-q^k}; q, q^k\right)$  et  $P_\mu(\mathbb{X}; q, q^k) \prod_{l=1}^{k-1} \Delta_{q^l}(\mathbb{X})$  sont proportionnels.*

### 10.5.4 Intégrale de Kaneko et Hyperturàniens décalés

Notons  $T_{n,d}^k(Q) := \text{Det}(Q_{i_1+\dots+i_{2k}+d})$ , l'hyperturànicien décalé associé aux polynômes  $(Q_n(x))_n$ .

L'intégrale de Selberg n'est pas assez générale pour nous permettre d'évaluer ce type d'hyperdéterminant pour les polynômes orthogonaux classiques. Nous utiliserons l'intégrale de Kaneko [95],

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{k,n}(y_1, \dots, y_m) &= \int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^r (x_i - y_j) \times \\ &\quad \times \prod_{i=1}^n x_i^{a-1} (1-x_i)^{b-1} |\Delta(x)|^{2k} dx_1 \cdots dx_n \quad (10.32) \\ &= 2^{-n} \mathcal{S}_n(a, b; k) p_{(n^r)}^{\alpha, \beta, \gamma}(1-2y_1, \dots, 1-2y_r), \end{aligned}$$

où  $p_{\kappa}^{\alpha, \beta, \gamma}(y)$  est un polynôme de Jacobi généralisé associé aux polynômes de Jack [103, 196, 43, 106] et  $\alpha = \frac{a}{k} - 1$ ,  $\beta = \frac{b}{k} - 1$  et  $\gamma = k - \frac{1}{2}$ . Ces polynômes sont obtenus en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt par rapport à la mesure

$$d\mu^{\alpha, \beta, \gamma}(y) = |\Delta(y)|^{2\gamma+1} \prod_{i=1}^r (1-y_i)^{\alpha} (1+y_i)^{\beta} dy_1 \cdots dy_r \quad (10.33)$$

sur  $[-1, 1]^r$  à la base des fonctions symétriques monomiales. La normalisation des ces polynômes a été choisie de façon à ce que le coefficient du monôme dominant soit égal à 1.

Les calculs sont simplifiés si on utilise une autre normalisation :

$$P_{\kappa}^{(a,b)}(y_1, \dots, y_r; \frac{1}{k}) = \frac{p_{\kappa}^{a,b,k-\frac{1}{2}}(1-2y_1, \dots, 1-2y_r)}{p_{\kappa}^{a,b,k-\frac{1}{2}}(1, \dots, 1)} \quad (10.34)$$

Lorsque  $\kappa = (n^r)$  est une partition rectangle,  $P_{\kappa}^{(a,b)}(y_1, \dots, y_r; \frac{1}{k})$  est une *fonction hypergéométrique multivariée symétrique associée aux polynômes de Jack*

$$P_{(n^r)}^{(a,b)}(y_1, \dots, y_r; \frac{1}{k}) = {}_2F_1^{(\alpha)} \left( \begin{matrix} -n; a+b+s+n \\ a+s \end{matrix} \middle| y_1, \dots, y_r \right) \quad (10.35)$$

où  $\alpha = \frac{1}{k}$  et  $s = 1 + (r-1)k$ . Les fonctions hypergéométriques multivariées sont celles définies dans [95, 103, 61] par

$${}_pF_q^{(\alpha)} \left( \begin{matrix} a_1 \dots a_p \\ b_1 \dots b_q \end{matrix} \middle| y_1, \dots, y_r \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{|\kappa|=n} \frac{[a_1]_{\kappa}^{(\alpha)} \cdots [a_p]_{\kappa}^{(\alpha)}}{[b_1]_{\kappa}^{(\alpha)} \cdots [b_q]_{\kappa}^{(\alpha)}} C_{\kappa}^{(\alpha)}(y_1, \dots, y_r) \quad (10.36)$$

où

$$[a]_{\kappa}^{(\alpha)} = \prod_{i=1}^{\ell(\kappa)} \left( a - \frac{1}{\alpha}(i-1) \right)_{\kappa_i}. \quad (10.37)$$

D'autres polynômes orthogonaux généralisés apparaissent dans nos calculs [135] : les polynômes de Laguerre [107]

$$L_{\kappa}^a(y_1, \dots, y_r; \alpha) = \lim_{b \rightarrow \infty} P_{\kappa}^{(a,b)} \left( \frac{y_1}{b}, \dots, \frac{y_r}{b}; \alpha \right) \quad (10.38)$$

et les polynômes d'Hermite [108]

$$H_{\kappa}(y_1, \dots, y_r; \alpha) = \lim_{a \rightarrow \infty} (-\sqrt{2a})^{|\kappa|} L_{\kappa}^a(a + y_1\sqrt{2a}, \dots, a + y_r\sqrt{2a}; \alpha). \quad (10.39)$$

Le tableau 10.2 résume les différents hyperturàniens que l'on peut calculer à partir de l'intégrale de Kaneko et des ses variantes. Pour le détail des calculs, le lecteur pourra se référer à l'article [135].

$Q_n$	$T_{n,r}(Q)$
Legendre	$(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}(kn(n-1)+nr)} P_{(nr)}^{\frac{1}{2k}-1, \frac{1}{2k}-1} \left( \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}, \dots, \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}; \frac{1}{k} \right)$
Laguerre	$x^{kn(n-1)+nr} {}_2F_0^{(k)} \left( -n, \frac{a+r-1}{k} + n-1 \mid \frac{1}{x}, \dots, \frac{1}{x} \right)$
Hermite	$H_{nr} \left( \frac{x}{\sqrt{k}}, \dots, \frac{x}{\sqrt{k}}; k \right).$
Charlier	$\prod_{j=0}^{n-1} (x)_{jk+r} L_{nr}^{-\frac{x}{k}-1} \left( -\frac{a}{k}, \dots, -\frac{a}{k}; k \right)$
Meixner	$\prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(x+jk+r)\Gamma(\beta-x+jk)}{\Gamma(x)\Gamma(\beta-x)} P_k^{\frac{x}{k}-1, \frac{\beta-x}{k}} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1}, \dots, \frac{\gamma}{\gamma-1}; k \right)$
Krawtchouk	$\prod_{j=0}^{n-1} (x)_{jk+r} (N-x)_{jk} P_{(nr)}^{-\frac{x}{k}-1, \frac{x-N}{k}-1} (2p, \dots, 2p; k)$

TAB. 10.2 – Hyperturàniens décalés

## 10.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré les liens entre les hyperdéterminants de Hankel, les puissances paires du Vandermonde et les polynômes de Jack. En particulier, nous avons vu que les hyperdéterminants de Hankel sont des



polynômes de Jack rectangles et peuvent être interprétés comme étant des images des puissances paires du Vandermonde par une fonctionnelle.

Les prolongements possibles de ce travail sont de deux types. Le premier concerne le calcul de certaines intégrales multiples. Nous avons vu que les intégrales de type Kaneko admettent une interprétation hyperdéterminantale. Il serait intéressant d'étendre nos calculs aux intégrales plus générales de type Hua, en réinterprétant certains passages de [103]. La seconde piste consiste à explorer le développement des puissances paires du Vandermonde. Un rapide calcul permet d'exprimer les coefficients apparaissant dans son développement sur les fonctions de Schur comme des hyperdéterminants décalés. Peut-on exploiter cette remarque pour les calculer rapidement ou pour en donner des propriétés? Dans [146], Matsumoto a montré qu'un hyperdéterminant de Hankel avec 4 indices peut s'exprimer comme un pfaffien. Il serait intéressant de prolonger cette formule aux hyperdéterminants de Hankel décalés afin de trouver un algorithme pour calculer les coefficients du développement du carré du Vandermonde dans la base de Schur.

# Chapitre 11

## Hyperdéterminants sur des semi-treillis

### 11.1 Introduction

Il est connu depuis la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle<sup>(1)</sup> que certains déterminants, dont les entrées dépendent uniquement du pgcd des indices, se factorisent. En 1876, Smith [182] a exprimé un tel déterminant pour une matrice dont les indices appartiennent à un ensemble clos par facteur (*i.e.*, un ensemble contenant tous les facteurs de chacun de ses éléments) comme un produit d'indicateurs d'Euler. L'intérêt de ce calcul se trouve dans son lien avec les fonctions arithmétiques [7] et en particulier les fonctions multiplicatives<sup>(2)</sup>. Au cours du siècle dernier, de nombreuses généralisations du théorème de Smith ont été proposées. Une des façons permettant d'étendre son résultat consiste à changer l'ensemble des indices. En 1990, Li [127] a donné l'évaluation du déterminant d'une matrice de *pgcd* pour un ensemble arbitraire d'indices et Beslin et Ligh [19] ont montré qu'un tel déterminant factorise lorsque l'ensemble des indices est clos par *pgcd* (*i.e.* un ensemble qui contient le *pgcd* de toutes les paires de ses éléments). Cette factorisation peut être vue comme le corollaire d'un résultat très élégant dû à Lindström et Wilf [128, 205] qui calculèrent le déterminant d'une matrice dont les entrées sont prises sur un demi-treillis inférieur (*i.e.* un poset tel que chaque paire admet une plus grande valeur inférieure). On appellera *inf-matrices* de telles ma-

---

<sup>(1)</sup>On peut trouver dans [3, 104] un panorama sur le sujet.

<sup>(2)</sup>Voir aussi [113, 111].

trices. Une autre façon d'étendre le théorème de Smith consiste à considérer ses analogues multidimensionnels. En 1930, Lehmer [122] a donné la première version du théorème de Smith pour des hypermatrices<sup>(3)</sup>. Récemment, Haukkanen [78] a généralisé les résultats de Beslin et Ligh [19] et ceux de Li [127] aux hypermatrices.

Dans ce chapitre, nous allons montrer, dans la section 11.2, que le principal argument permettant d'obtenir ces généralisations consiste à développer les hyperdéterminants comme une somme multialternée de déterminants (de matrices). Cette méthode s'applique à des objets plus généraux que l'on nommera  $\mathfrak{F}$ -déterminants (section 11.3). Enfin, dans la section 11.4, nous donnons une généralisation d'un théorème de Haukkanen aux hypermineurs d'inf-hypermatrices. Les résultats résumés dans ce chapitre sont extraits de [130].

## 11.2 $\mathfrak{F}$ -déterminants

Soit  $\mathfrak{F}$  une application de  $\mathfrak{S}_n^{k-2}$  dans un anneau commutatif. Nous considérons la généralisation des riciens suivante

$$\mathfrak{F}\text{Det}(M) = \sum_{\sigma=(\sigma_2, \dots, \sigma_k) \in \mathfrak{S}_n^{k-1}} \text{signe}(\sigma_2) \mathfrak{F}(\sigma_3, \dots, \sigma_k) \prod_i M_{i\sigma_2(i) \dots \sigma_k(i)}$$

que l'on nommera  $\mathfrak{F}$ -déterminant.

La définition de ce polynôme distingue les deux premiers indices de l'hypermatrice qui ont un rôle particulier. En fait, on peut étendre cette définition pour n'importe quel couple d'indices. Les résultats présentés dans ce chapitre resteront valables (à condition de permuter convenablement les indices).

L'égalité présentée ci-dessous s'obtient par des manipulations élémentaires sur les sommes et va être fondamentale dans la suite de ce chapitre.

**Lemme 28** *Tout  $\mathfrak{F}$ -déterminant admet la décomposition suivante comme une somme de déterminants classiques*

$$\mathfrak{F}\text{Det}(M) = \sum_{\sigma_3, \dots, \sigma_k} \mathfrak{F}(\sigma_3, \dots, \sigma_k) \det(M^{\sigma_3, \dots, \sigma_k}),$$

où  $M^{\sigma_3, \dots, \sigma_k}$  est la matrice  $n \times n$  vérifiant  $M_{i,j}^{\sigma_3, \dots, \sigma_k} = M_{i,j, \sigma_3(i), \dots, \sigma_k(i)}$ .

---

<sup>(3)</sup>On peut trouver d'autres résultats dans [180, 181])

La propriété d'invariance des riciens (lorsque l'on agit sur les indices alternants) est une conséquence triviale de ce lemme et plus généralement on a le résultat suivant.

**Proposition 29** *Le polynôme  $\mathfrak{F}\text{Det}(M)$  est un invariant relatif pour l'action du groupe linéaire définie par*

$$g.M = \left( \sum_{1 \leq j_2 \leq n} g_{i_2 j_2} M_{i_1, j_2, i_3, \dots, i_k} \right)_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n}.$$

Autrement dit,

$$\mathfrak{F}\text{Det}(g.M) = \det g \mathfrak{F}\text{Det}(M). \quad (11.1)$$

### 11.3 Théorème de Lindström pour les $\mathfrak{F}$ -déterminants

Considérons un ensemble fini  $L$  muni d'une relation d'ordre partiel telle que toute paire  $(x, y) \in L^2$  admet un plus grand élément inférieur que l'on notera  $x \wedge y$ . De façon classique, la fonction  $\zeta$  de  $L$  est définie par

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sa fonction de Möbius est l'inverse de sa fonction  $\zeta$  et peut être calculée récursivement grâce à la formule

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu(z, y) & \text{si } x < y, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Si  $F$  et  $f$  sont deux fonctions satisfaisant

$$F(x) = \sum_{y \leq x} f(y) = \sum_{y \in L} \zeta(y, x) f(y), \quad (11.2)$$

alors on peut inverser cette égalité en introduisant le produit  $\star$  de convolution :

$$f(x) = \sum_{y \in L} \mu(y, x) F(y) = (F \star \mu)(x). \quad (11.3)$$

C'est la célèbre formule d'inversion de Möbius.

La factorisation des déterminants des matrices dont les entrées dépendent du pgcd des indices est une conséquence de la structure de demi-treillis (pour la divisibilité) des entiers et peut être établie sous une forme plus générale. Les manipulations des identités (11.2) et (11.3) sont au centre de la preuve par Lindström [128] du théorème de Wilf [205]. Une technique similaire permet d'étendre le théorème de Lindström et Wilf pour les  $\mathfrak{F}$ -déterminants.

**Théorème 30** *Soit  $L = \{x_1, \dots, x_n\}$  un semi-treillis inférieur. Nous considérons pour tout  $x \in L$ , une fonction  $F_x$  de  $L$  dans  $\mathbb{C}$  ainsi qu'un élément  $z_x \leq x$ . On a*

$$\mathfrak{F}\text{Det} (F_{x_{i_1}}(z_{x_{i_1}} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_k})) = \begin{cases} \mathcal{F}(\text{Id}, \dots, \text{Id}) \prod_x f_x(x) & \text{si } z_x = x \text{ pour tout } x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{où } f_x(z) = \sum_{y \in L} \mu(y, z) F_x(y).$$

La démonstration (voir [130]) utilise le théorème original de Lindström et Wilf [128, 205] appliqué aux déterminants apparaissant dans le développement du lemme 28.

## 11.4 Des mineurs

Nous considérons le problème suivant. Soit  $S \subset L$  un sous-ensemble d'un demi-treillis inférieur, quelle expression peut-on donner au  $\mathfrak{F}$ -déterminant dont les indices sont pris dans  $S$ ?

Si  $S$  est clos pour l'opération  $\wedge$ , choisissons une extension linéaire  $(y_1, \dots, y_n)$  de  $S$  (i.e. un ordre total sur  $S$  compatible avec l'ordre partiel). Nous utiliserons la notation de [3]  $x \trianglelefteq y_i$  pour désigner la relation  $x \leq y_i$  et  $x \not\trianglelefteq y_j$  pour tout  $j < i$ . Soient  $f$  et  $F$  deux fonctions vérifiant

$$F(y_i) = \sum_{\substack{x \leq y_i \\ x \in L}} f(x). \quad (11.4)$$

Posons  $\hat{f}(y_i) = \sum_{x \trianglelefteq y_i} f(x)$ . Le lemme suivant est donné dans [3] (théorème 4.1), des preuves sont données aussi dans [79, 130].

**Lemme 31** *La fonction  $\hat{f}$  est égale au produit de convolution de  $F$  par la fonction de Möbius de  $S$ . Autrement dit,*

$$F(y_i) = \sum_{y_k \leq y_i} \hat{f}(y_k). \quad (11.5)$$

Ce lemme permet de généraliser le théorème 4.1 de l'article [3].

### Corollaire 32

$$\mathfrak{F}\text{Det} (F_{y_{i_1}}(y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_k})) = \mathcal{F}(\text{Id}, \dots, \text{Id}) \prod_{i=1}^n \left( \sum_{x_1 \leq y_i} \sum_{x_2 \in L} \mu(x_1, x_2) F_{y_i}(x_2) \right). \quad (11.6)$$

Les détails de la preuve se trouvent dans [130].

Si  $S$  est un ensemble clos pour  $\leq$  (*i.e.* pour tout  $y \in S$ ,  $x \leq y$  implique  $x \in S$ ), alors  $f = \hat{f}$  et

$$\mathfrak{F}\text{Det} (F_{x_1}(x_1 \wedge \dots \wedge x_k))_{x_1, \dots, x_k \in S} = \mathcal{F}(\text{Id}, \dots, \text{Id}) \prod_x f_x(x). \quad (11.7)$$

Les identités de Lehmer [122] ainsi que le résultat de Smith sont des cas particuliers de cette identité.

Traitons maintenant le cas général. Si  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  nous noterons  $\overline{S} = \{s_1, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, s_{n+m}\}$  le plus petit sous-ensemble de  $L$  contenant  $S$  et clos pour l'opération  $\leq$ . Nous allons nous intéresser au polynôme

$$DF(X) := \mathfrak{F}\text{Det} (F_{s_{i_1}}(z_{s_{i_1}} \wedge s_{i_2} \wedge \dots \wedge s_{i_k}))_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n}, \quad (11.8)$$

où pour tout  $s \in S$ ,  $z_s$  désigne un élément de  $\overline{S}$  tel que  $z_s \leq s$ .

La première étape consiste à démontrer le résultat suivant dans le cas des matrices classiques ( $k = 1$ )<sup>(4)</sup>. Il s'agit d'une généralisation du théorème de Li [127].

### Proposition 33 On a

$$\det(F_{s_i}(s_i \wedge s_j)) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq n+m} \det(C_{s_i, s_{k_j}})_{1 \leq i, j \leq n} \det(\zeta(s_{k_i}, s_j))_{1 \leq i, j \leq n}. \quad (11.9)$$

où

$$C_{x,y} = f_x(y) \zeta(y, z_x) = \begin{cases} f_x(y) & \text{si } y \leq z_x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (11.10)$$

Pour obtenir le résultat général, il suffit alors d'appliquer le lemme 28 puis la proposition 33 sur chaque déterminant de la somme. On obtient alors une version multi-indices de la proposition 33.

---

<sup>(4)</sup>Voir [130] pour la preuve.

**Théorème 34**

$$DF(X) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq n+m} \mathfrak{F}\text{Det} \left( f_{s_{i_1}}(s_{k_{i_2}}) \zeta(s_{k_{i_2}}, z_{s_{i_1}} \wedge s_{i_3} \wedge \dots \wedge s_{i_k}) \times \right. \\ \left. \times \det(\zeta(s_{k_i}, s_j)) \right). \quad (11.11)$$

Si on pose  $F_{s_1} = F_{s_2} = \dots = F$ , on obtient :

**Corollaire 35**

$$\mathfrak{F}\text{Det} \left( F(z_{s_{i_1}} \wedge s_{i_2} \wedge \dots \wedge s_{i_k}) \right) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq n+m} \prod_i f(s_{k_i}) \times \\ \times \mathfrak{F}\text{Det} \left( \zeta(s_{k_{i_2}}, z_{s_{i_1}} \wedge s_{i_3} \wedge \dots \wedge s_{i_k}) \right) \det(\zeta(s_{k_i}, s_j)).$$

En posant  $z_s = s$  pour tout  $s$  et  $\mathfrak{F}(\sigma_3, \dots, \sigma_k) = \text{signe}(\sigma_3) \dots \text{signe}(\sigma_k)$  dans le corollaire 35, on retrouve le théorème 2 de [78].

## 11.5 Conclusion

Le but de ce chapitre était double. Tout d'abord, il s'agissait de donner des identités les plus générales possibles permettant de calculer des hyperdéterminants d'hypermatrices dont les indices appartiennent à un demi-treillis. Nous avons vu que ces identités pouvaient être proposées pour des polynômes beaucoup plus généraux : les  $\mathfrak{F}$ -déterminants. La seconde motivation était d'illustrer le principe que certains résultats sur les hypermatrices peuvent se déduire de résultats sur les matrices. Il est, bien sûr, évident que la plupart des propriétés des hyperdéterminants ne provient pas de celles des déterminants. Par exemple, bien que l'on puisse concevoir une élimination de Gauss, celle-ci ne conduit pas à une hypermatrice triangulaire. Néanmoins, il semble intéressant d'établir une liste d'outils élémentaires qui permet de démontrer sans effort des extensions multi-linéaires de propriétés connues pour les matrices. Par exemple, le lemme 28, qui est une identité triviale, permet de démontrer le théorème 34, sa version matricielle ayant été préalablement prouvée (proposition 33).

# Chapitre 12

## Hyperpfaffiens

### 12.1 Introduction

L'hyperpfaffien est une généralisation du pfaffien pour les partitions de  $\{1, \dots, n\}$  en blocs de taille supérieure ou égale à 2. Cet objet a été introduit par Barvinok [13] pour des partitions homogènes de taille paire. Un peu plus tard, Abdesselam [1] a donné une généralisation du théorème *Pfaffian-Tree* de Vaintrob [140] faisant intervenir un hyperpfaffien défini pour des partitions de tailles non-homogènes. Dans ce chapitre, nous reproduisons les résultats de [132] qui sont consacrés à l'étude de l'hyperpfaffien de Barvinok (partitions homogènes)<sup>(1)</sup>. Ce polynôme est un invariant des formes multilinéaires antisymétriques pour l'action du groupe linéaire. Certaines propriétés du pfaffien se prolongent aux hyperpfaffiens. Par exemple, nous donnons dans [132] des généralisations de la formule du pfaffien d'une somme de tenseurs due à Stembridge [184] et de la sommation de mineurs due à Ishikawa et Wakayama [92]. La première section de ce chapitre est consacrée à des propriétés générales de l'hyperpfaffien. Un exemple important est celui des identités de de Bruijn. Dans [44], il montre que certaines intégrales faisant intervenir des déterminants peuvent être évaluées comme des pfaffiens. Dans [132], nous montrons que les identités de de Bruijn sont des conséquences d'identités pfaffiennes dans l'algèbre de mélange<sup>(2)</sup> via le lemme de Chen [38]. Ces égalités se généralisent aux hyperpfaffiens, et font l'objet de la seconde partie de

---

<sup>(1)</sup>Voir [162] pour une étude complète sur les autres cas.

<sup>(2)</sup>Le produit dont la loi duale est le coproduit pour lequel les polynômes de Lie sont primitifs ([163] par exemple).



ce chapitre..

## 12.2 Généralités

L'*hyperpfaffien* est une généralisation multidimensionnelle du pfaffien définie par Barvinok [13] pour une hypermatrice antisymétrique (*i.e.*  $M_{i_1, \dots, i_k} = \text{signe}(\sigma) M_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}}$ ) par

$$\text{Pfa}(\mathcal{M}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{kn, k}} \text{signe}(\sigma) M_{\sigma(1) \dots \sigma(k)} \cdots M_{\sigma((n-1)k+1) \dots \sigma(nk)}. \quad (12.1)$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{kn, k} = \{ \sigma \in \mathfrak{S}_{kn} \mid & \sigma(ki+1) < \cdots < \sigma(k(i+1)), \\ & \sigma(k(p-1)+1) < \sigma(kp+1), 0 \leq i \leq n-1, 1 \leq p \leq n-1 \}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Soit un ensemble de variables anti-commutatives  $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_k, \dots\}$ . Comme dans le cas des hyperdéterminants, on peut donner une définition alternative en considérant le tenseur

$$\mathbf{M} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq nk} M_{i_1 \dots i_k} \eta_{i_1} \cdots \eta_{i_k}.$$

Si on élève  $\mathbf{M}$  à la puissance  $n$ , on obtient l'hyperpfaffien

$$\mathbf{M}^n = n! \text{Pfa}(\mathcal{M}) \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{kn}. \quad (12.3)$$

On notera  $\text{Pfa}(\mathbf{M}) = \text{Pfa}(\mathcal{M})$ . Remarquons que si  $k$  est impair alors  $\text{Pfa} = 0$ .

Certaines propriétés des pfaffiens se prolongent à ce polynôme. Par exemple, l'hyperpfaffien est un invariant relatif des tenseurs anti-symétriques pour l'action  $\otimes$  de  $GL_n$  définie par

$$g \otimes \mathbf{M} = (g, \dots, g) \cdot \mathbf{M}. \quad (12.4)$$

En utilisant la formule (12.3), on trouve

$$\text{Pfa}(g \otimes \mathbf{M}) = \det(g) \text{Pfa}(\mathbf{M}). \quad (12.5)$$

Un autre exemple est donné par la formule de sommation pour les pfaffiens<sup>(3)</sup>. Cette formule se généralise aisément aux hyperpfaffiens<sup>(4)</sup>.

**Proposition 36** *On a*

$$\text{Pfa}(\mathcal{M} + \mathcal{N}) = \sum_{m=0}^n \sum_{I=\{i_1 < \dots < i_{2km}\}} (-1)^{|I|-km} \text{Pfa}(\mathcal{M}[I]) \text{Pfa}(\mathcal{N}[I^c]), \quad (12.6)$$

où  $\mathcal{M}[I]$  est la sous-hypermatrice de  $\mathcal{M}$  dont tous les indices appartiennent à  $I$  et  $I^c$  désigne le complémentaire de  $I$  dans  $\{1, \dots, 2kn\}$ .

Le troisième exemple que donnons est la généralisation de la formule de sommation de mineurs<sup>(5)</sup>

**Proposition 37** *Soit  $\mathcal{M} = (M_{i_1, \dots, i_{2k}})$  un tenseur antisymétrique d'ordre  $2k$  et de dimension  $2kn$  et  $\mathcal{T} = (T_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2kn}$  une matrice carrée. On a,*

$$\sum_{I=\{i_1 < \dots < i_{2kt}\}} \text{Pfa}(\mathcal{M}[I]) \det(\mathcal{T} \begin{bmatrix} 1 \dots 2kt \\ i_1 \dots i_{2kt} \end{bmatrix}) = \text{Pfa}(\mathcal{Q}), \quad (12.7)$$

où  $\mathcal{T} \begin{bmatrix} 1 \dots 2kt \\ i_1 \dots i_{2kt} \end{bmatrix}$  est la sous-matrice de  $T$  dont les lignes sont  $1 \dots 2kt$  et les colonnes  $i_1 \dots i_{2kt}$  et  $\mathcal{Q} = (Q_{i_1 \dots i_{2k}})_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq 2kt}$  est l'hypermatrice définie par

$$Q_{i_1 \dots i_{2k}} = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{2k} \leq 2kn} a_{j_1 \dots j_{2k}} \det \left( T \begin{bmatrix} i_1 \dots i_{2k} \\ j_1 \dots j_{2k} \end{bmatrix} \right).$$

La preuve complète se trouve dans [132].

D'autres formules, nouvelles, apparaissent lorsque l'on compose des hyperpfaffiens.

---

<sup>(3)</sup>Cette formule est due à Stembridge [184].

<sup>(4)</sup>La preuve est donnée dans [135] et s'obtient à partir de l'égalité (12.3) en calculant la puissance  $n$ ième de

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{2k} \leq 2nk} (a_{i_1 \dots i_{2k}} + b_{i_1 \dots i_{2k}}) \eta_{i_1} \dots \eta_{i_{2k}}.$$

<sup>(5)</sup>La version matricielle est due à Ishikawa et Wakayama [92].

**Proposition 38** *Pour toute matrice antisymétrique  $\mathcal{A} = (A_{i_1 \dots i_{2k}})_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq i_{2nk}}$ , on a*

$$\text{Pfa} \left( \text{pfa} \left( \mathcal{A} \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_{2k} \\ i_1 & \dots & i_{2k} \end{bmatrix} \right) \right)_{1 \leq i_1, \dots, i_{2m} \leq 2kn} = \frac{(kn!)}{(k!)^n n!} \text{pfa}(\mathcal{A}). \quad (12.8)$$

Cette formule est démontrée dans [132] et est utilisée par Ishikawa et al. [91] afin de donner des généralisations de la formule de Schur sur les pfaffiens.

De façon similaire, on peut définir l'hyperhafnien

$$\text{Haf}(\mathcal{M}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{kn, k}} M_{\sigma(1) \dots \sigma(k)} \cdots M_{\sigma((n-1)k+1) \dots \sigma(nk)} \quad (12.9)$$

qui admet une définition alternative en considérant un ensemble de variables commutatives  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$  vérifiant  $\xi_i^2 = 0$ . Soit le polynôme

$$\mathbf{M} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq nk} M_{i_1 \dots i_k} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}. \quad (12.10)$$

L'hyperhafnien apparaît lorsque l'on calcule la puissance  $n$ ième de ce polynôme

$$\mathbf{M}^n = n! \text{Haf}(\mathcal{M}) \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{kn}. \quad (12.11)$$

## 12.3 Formules de Wick d'ordre supérieur et applications

De façon très générale, considérons un anneau commutatif  $K$  ainsi qu'un ensemble de scalaires multi-indexés  $\{Q_{i_1, \dots, i_{2k}}\}_{i_1 < \dots < i_{2k}}$ . Soit

$$F = \prod_{i_1} \left( 1 + \sum_{i_1 < \dots < i_k} Q_{i_1 \dots i_{2k}} \eta_{i_1} \cdots \eta_{i_{2k}} \right). \quad (12.12)$$

une série formelle sur les variables anti-commutatives  $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots\}$ .

La formule de Wick que nous présentons ici, permet d'exprimer les coefficients apparaissant dans le développement de  $F$ .

**Proposition 39** *(Formule de Wick Fermionique généralisée)*

*Si  $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ , le coefficient de  $\eta_{i_1} \cdots \eta_{i_{2k}}$  dans  $F$  est  $\text{Pfa}(Q[I])$*

Si on considère un ensemble de variables commutatives  $\{\xi_i\}$  tel que  $\xi_i^2 = 0$ , alors on obtient la version bosonique de l'identité de Wick généralisée.

**Proposition 40** (*Formule de Wick bosonique généralisée*)

$$\sum_{I=\{i_1 < \dots < i_{2kn}\}} \text{Haf}(Q[I]) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{2kn}} = \prod_{i_1} \left( 1 + \sum_{i_1 < \dots < i_{2k}} Q_{i_1 \dots i_{2k}} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{2k}} \right). \quad (12.13)$$

Les propositions 39 et 40 sont démontrées dans [132].

L'algèbre associative libre  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$  peut être munie de façon naturelle d'un produit commutatif appelé produit de mélange défini récursivement par

$$au \sqcup bv = a(u \sqcup bv) + b(au \sqcup v)$$

où  $a, b \in A$  sont des lettres d'un alphabet non-commutatif  $A$  et  $u, v \in A^*$  sont des mots. Ce produit est la loi duale de la comultiplication dont les éléments primitifs sont les polynômes de Lie<sup>(6)</sup>. Le produit de mélange étant commutatif, nous pouvons appliquer les formules (39) et (40) et obtenir les égalités données dans le lemme suivant<sup>(7)</sup>.

**Lemme 41** 1. *Formule hyperpfaffienne dans l'algèbre de mélange*

$$\text{Pfa} \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2k}} \text{signe}(\sigma) a_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(2k)}} \right)_{\sqcup} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2nk}} \text{signe}(\sigma) a^\sigma. \quad (12.14)$$

2. *Formule Hyperhafnienne dans l'algèbre de mélange*

$$\text{Haf} \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2k}} a_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(2k)}} \right)_{\sqcup} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2nk}} a^\sigma. \quad (12.15)$$

Les symboles  $a_{i_1 \dots i_{2k}}$  désignent des lettres d'un alphabet  $A$  et

$$a^\sigma = a_{\sigma(1) \dots \sigma(2k)} \cdots a_{\sigma(2(n-1)k+1) \dots \sigma(2nk)}.$$

Lorsque  $k = 1$  (matrices anti-symétriques), on peut donner plusieurs versions des identités pfaffiennes [132]. En voici une liste.

<sup>(6)</sup>Il s'agit du théorème de Friedrichs que l'on peut trouver dans [163] par exemple.

<sup>(7)</sup>La preuve de ces deux identités se trouve dans [132].

**Proposition 42** *On a les égalités suivantes.*

1.

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \text{signe}(\sigma) a_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1)} b_{\sigma(2n)} = \text{pfa}(a_i b_j - a_j b_i)_{\sqcup} \quad (12.16)$$

2.

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \text{signe}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)} = \text{pfa}(a_{ij} - a_{ji})_{\sqcup} \quad (12.17)$$

3.

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)} = \text{haf}(Q_{ij})_{\sqcup}. \quad (12.18)$$

où  $Q_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$  si  $i \neq j$  et  $Q_{kk} = 0$ .

4.

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(2n)} = \frac{1}{(2n)!!} \text{haf}(Q_{ij})_{\sqcup} \quad (12.19)$$

où  $Q_{ij} = a_i a_j + a_j a_i$  si  $k \neq l$  et  $Q_{kk} = 0$ .

5.

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = \begin{cases} \text{pfa}(Q_{ij})_{\sqcup} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \sum_p (-1)^{p+1} a_p \sqcup \text{pfa}(Q_{ij})_{i,j \neq p} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \quad (12.20)$$

où

$$Q_{ij} = \begin{cases} a_i \sqcup a_j & \text{si } i < j \\ -a_j \sqcup a_i & \text{si } j < i \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (12.21)$$

6. Si on munit  $\mathbb{Z}\langle A \rangle$  du produit d'anti-mélange (produit anticommutatif défini par  $au \sqcup bv = a(u \sqcup bv) + (-1)^{|au|} b(au \sqcup v)$ ), on obtient

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{signe}(\sigma) a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = \begin{cases} \text{haf}(Q_{ik})_{\sqcup} \quad 1 \leq i, j \leq n & \text{si } n \text{ est pair} \\ \sum_p a_p \sqcup \text{haf}(Q_{ij})_{i,j \neq p} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (12.22)$$

où  $Q_{ij} = Q_{ji} = a_i a_j - a_j a_i$  si  $i \leq j$ .

Le lemme de Chen [38] permet de décrire le produit d'intégrales itérées comme un produit de mélange. Dans [132], nous montrons que les formules de de Bruijn sur les intégrales itérées [44] peuvent se déduire du lemme de Chen et de la proposition 42. Dans le même article, nous utilisons le lemme 41 afin de donner des versions multi-dimensionnelles des calculs de de Bruijn.

**Théorème 43** (*De Bruijn généralisée*)

*On a les identités suivantes*

1.

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}_\Phi(a, b) &= \int \cdots \int_{a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b} \det(\phi_{1i}(x_j) | \cdots | \phi_{2ki}(x_j))_{\substack{1 \leq i \leq 2nk \\ 1 \leq j \leq n}} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \text{Pfa} \left( \int_a^b \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2k}} \text{signe}(\sigma) \phi_{1i_{\sigma(1)}}(x) \cdots \phi_{2ki_{\sigma(2k)}}(x) dx \right). \end{aligned} \quad (12.23)$$

2.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_\Phi(a, b) &= \int \cdots \int_{a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b} \text{per}(\phi_{1i}(x_j) | \cdots | \phi_{2ki}(x_j))_{\substack{1 \leq i \leq 2nk \\ 1 \leq j \leq n}} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \text{Haf} \left( \int_a^b \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2k}} \phi_{1i_{\sigma(1)}}(x) \cdots \phi_{2ki_{\sigma(2k)}}(x) dx \right). \end{aligned} \quad (12.24)$$

où  $(\phi_{1i}(x_j) | \cdots | \phi_{2ki}(x_j))$  désigne une matrice dont la  $i$ ème ligne est

$$(\phi_{1i}(x_1) \cdots \phi_{1i}(x_n) | \cdots | \phi_{2ki}(x_1) \cdots \phi_{2ki}(x_n))$$

## 12.4 Conclusion

Peu de choses sont connues sur les hyperpfaffiens. En effet, ces objets n'ont été définis que récemment [13] et peu étudiés [1, 13, 132, 162]. Dans ce chapitre, nous avons montré quelques propriétés générales de ces polynômes. Nous avons surtout insisté sur leurs applications liées aux calculs d'intégrales de type de Bruijn. Néanmoins, ces polynômes restent difficiles à calculer. Dans le cas classique des matrices ( $k = 1$ ), le pfaffien est la racine carrée du déterminant d'une matrice antisymétrique. Une telle identité n'est pas connue dans le cas des hyperpfaffiens. La taille des polynômes interdisant les tests

dans le cas général, il est difficile de savoir si une telle identité se prolonge. En testant sur des cas très particuliers de matrices anti-diagonales par bloc, nous pouvons affirmer que si une telle identité existe elle fait apparaître un coefficient de proportionnalité entre l'hyperdéterminant et la puissance  $2k$  de l'hyperpfaffien (ce calcul fera l'objet d'un prochain article). Ce coefficient est lié à la constante d'Alon-Tarsi [10] qui apparaît dans l'énumération des quasi-groupes [9, 143]. Cette constante est définie comme la somme des signes des carrés latins<sup>(8)</sup> de taille fixée et est conjecturée strictement positive à partir du rang 4. En se basant sur des calculs de Gherardelli [64] montrant que cette constante est égale à l'hyperdéterminant d'un tenseur antisymétrique, Zappa [208] a montré la positivité de cette constante pour les ordres pairs (la stricte positivité n'est pas connue de façon générale [48]). La conjecture d'Alon-Tarsi est donc équivalente à la non-nullité de l'hyperdéterminant d'un tenseur anticommutatif. Plus généralement, les propriétés géométriques des hyperdéterminants ne sont pas connus. Et il serait intéressant d'étudier la variété définie par  $\text{DET} = 0$ .

---

<sup>(8)</sup>Les carrés latins, définis par Euler [56], ont fait l'objet de très nombreux articles. En particulier, aucune formule ne permet de les compter et leur dénombrement n'est connu que jusqu'à l'ordre 11 [11, 27, 59, 142, 144, 175, 203]. Les premières valeurs du nombre de carrés latins et de la constante d'Alon-Tarsi sont disponibles sur [183].

# Chapitre 13

## Conclusion

Nous avons vu dans le chapitre 10 que des manipulations élémentaires sur les hyperdéterminants permettent de mettre au point de nouvelles preuves de certaines intégrales multiples (comme celle de Selberg et d'Aomoto). Le calcul par Selberg de son intégrale s'appuie sur un raisonnement de type hyperdéterminantal bien qu'il n'y fasse pas référence. Une partie de notre article [136] est consacrée à la *traduction* de la preuve de Selberg en termes d'hyperdéterminants. Il existe de nombreuses autres preuves de l'intégrale de Selberg (Aomoto, Anderson, Doltsenko-Fateev [4, 5, 47], ces techniques sont compilées dans [62]). La question de savoir s'il existe des interprétations hyperdéterminantales de celles-ci mérite d'être posée.<sup>(1)</sup>

La preuve d'Aomoto de son intégrale est reliée à l'équation de Calogero. L'exploitation de cette équation dans la généralisation de Kaneko, fait apparaître des polynômes hypergéométriques (et des polynômes orthogonaux symétriques) associés aux polynômes de Jack. Nous pouvons naturellement nous poser la question du lien entre la forme hyperdéterminantale de ces intégrales et l'équation de Calogero. Tous ces calculs d'intégrales proviennent du fait que, d'une certaine façon, les puissances paires du Vandermonde peuvent être considérées comme les *ombres* d'hyperdéterminants de Hankel. La question du développement des puissances paires du Vandermonde fait donc sens dans le cadre des calculs d'hyperdéterminants. Mais elle a aussi des applications dans d'autres domaines comme celui de l'effet Hall quantique [169]. Le développement des puissances paires du Vandermonde sur des bases de

---

<sup>(1)</sup>Le but n'est pas de redémontrer des choses existantes (ni même de donner des preuves plus courtes ou plus simples) mais d'élaborer de nouvelles méthodes de calcul et de les tester sur des cas connus avant de les exploiter sur d'autres problèmes.



fonctions symétriques est une question ouverte, difficile et certainement hors de portée des investigations immédiates. Néanmoins, on peut tout de même expliciter des coefficients pour des fonctions symétriques indexées par des partitions ayant des formes particulières. Par exemple, le coefficient des fonctions de Schur indexées par une partition rectangle peut être relié au terme constant de Dyson [51] et explicité comme étant un coefficient multinomial [136].

D'autres hyperdéterminants ont été très peu étudiés. C'est le cas en particulier des hyperdéterminants de tenseurs antisymétriques. Gherardelli [64] a montré que des sommes alternées sur des carrés latins peuvent s'interpréter comme de tels polynômes. La non-nullité de ces sommes est un problème encore ouvert<sup>(2)</sup> que l'on peut aborder par le biais de l'étude des relations entre les hyperdéterminants et les hyperpfaffiens.

De façon générale, ces polynômes n'ont pas reçu l'accueil qu'ils méritaient. Les quelques cas qui ont été considérés depuis Cayley sont pourtant reliés à des domaines diverses des mathématiques (carrés latins, quasi-groupes, polynômes de Jack, intégrales itérées, fonctions hypergéométriques *etc.*). L'aspect géométrique n'a jamais, à ma connaissance, été approfondi. En particulier, les interprétations des variétés algébriques définies par  $\text{Det} = 0$  manquent pour la compréhension des hyperdéterminants.

---

<sup>(2)</sup>Conjecture d'Alon-Tarsi[10].

# Annexe A

## Liste des générateurs de l'algèbre des invariants de la forme quadrilinéaire

Le seul générateur de degré 1 est la forme elle-même. Les autres générateurs sont obtenus en appliquant les transvections suivantes.

Degré 2		Degré 3	
Invariant	Transvectant	Invariant	Transvectant
$B_{0000}$	$(f, f)^{1111}$	$C_{1111}^1$	$(f, B_{1100})^{1100}$
$B_{1100}$	$(f, f)^{0011}$	$C_{1111}^2$	$(f, B_{1010})^{1010}$
$B_{1010}$	$(f, f)^{0101}$	$C_{3111}$	$(f, B_{1100})^{0100}$
$B_{1001}$	$(f, f)^{0110}$		$(f, B_{1100})^{1000}$
$B_{0110}$	$(f, f)^{1001}$		$(f, B_{1010})^{1000}$
$B_{0101}$	$(f, f)^{1010}$		$(f, B_{1001})^{1000}$
$B_{0011}$	$(f, f)^{1100}$		

Degré 4

Invariant	Transvectant	Invariant	Transvectant
$D_{0000}^1$	$(f, C_{1111}^1)^{1111}$	$D_{4000}$	$(f, C_{3111})^{0111}$
$D_{0000}^2$	$(f, C_{1,1,1,1}^2)^{1111}$	$D_{0400}$	$(f, C_{1311})^{1011}$
$D_{2200}$	$(f, C_{3111})^{1011}$	$D_{0040}$	$(f, C_{1131})^{1101}$
$D_{2020}$	$(f, C_{1111}^1)^{0101}$	$D_{0004}$	$(f, C_{1113})^{1110}$
$D_{2002}$	$(f, C_{3111})^{1110}$	$D_{2220}^1$	$(f, C_{1311})^{0101}$
$D_{0220}$	$(f, C_{1311})^{1101}$	$D_{2220}^2$	$(f, C_{1111}^1)^{0001}$
$D_{0202}$	$(f, C_{1311})^{1110}$	$D_{2202}^1$	$(f, C_{1113})^{0011}$
$D_{0022}$	$(f, C_{1131})^{1110}$	$D_{2202}^2$	$(f, C_{1311})^{0110}$
		$D_{2022}^1$	$(f, C_{1113})^{0101}$
		$D_{2022}^2$	$(f, C_{1111}^1)^{0100}$
		$D_{0222}^1$	$(f, C_{1113})^{1001}$
		$D_{0222}^2$	$(f, C_{1311})^{1100}$

Degré 5

Invariant	Transvectant
$E_{1111}$	$(f, D_{2200})^{1100}$
$E_{3111}^1$	$(f, D_{2200})^{0100}$
$E_{3111}^2$	$(f, D_{2202}^1)^{0101}$
$E_{3111}^3$	$(f, D_{2022}^2)^{0011}$
$E_{1311}^1$	$(f, D_{2200})^{1000}$
$E_{1311}^2$	$(f, D_{0202})^{0001}$
$E_{1311}^3$	$(f, D_{0220})^{0010}$
$E_{1131}^1$	$(f, D_{0222}^1)^{0101}$
$E_{1131}^2$	$(f, D_{2022}^2)^{1001}$
$E_{1131}^3$	$(f, D_{2020})^{1000}$
$E_{1113}^1$	$(f, D_{2022}^1)^{1010}$
$E_{1113}^2$	$(f, D_{2022}^2)^{1010}$
$E_{1113}^4$	$(f, D_{0004})^{0001}$

## Degré 6

Invariant	Transvectant	Invariant	Transvectant
$F_{0000}$	$(f, E_{1111})^{1111}$	$F_{4200}$	$(f, E_{3111}^1)^{0011}$
$F_{2200}$	$(f, E_{3111}^1)^{1011}$	$F_{4020}$	$(f, E_{3111}^2)^{0101}$
$F_{2020}$	$(f, E_{1111})^{0101}$	$F_{4002}$	$(f, E_{3111}^2)^{0110}$
$F_{2002}$	$(f, E_{1113}^1)^{0111}$	$F_{0420}$	$(f, E_{1311}^3)^{1001}$
$F_{0220}$	$(f, E_{1311}^1)^{1101}$	$F_{0402}$	$(f, E_{1311}^2)^{1010}$
$F_{0202}$	$(f, E_{1113}^3)^{1011}$	$F_{0042}$	$(f, E_{1131}^1)^{1100}$
$F_{0022}$	$(f, E_{1113}^1)^{1101}$	$F_{2400}$	$(f, E_{1311}^1)^{0011}$
$F_{2220}^1$	$(f, E_{1311}^1)^{0101}$	$F_{2040}$	$(f, E_{1131}^1)^{0101}$
$F_{2220}^2$	$(f, E_{1311}^2)^{0101}$	$F_{2004}$	$(f, E_{1113}^1)^{0110}$
$F_{2202}^1$	$(f, E_{3111}^2)^{1010}$	$F_{0240}$	$(f, E_{1131}^1)^{1001}$
$F_{2202}^2$	$(f, E_{3111}^3)^{1010}$	$F_{0204}$	$(f, E_{1113}^1)^{1010}$
$F_{2022}^1$	$(f, E_{1113}^1)^{0101}$	$F_{0024}$	$(f, E_{1113}^1)^{1100}$
$F_{2022}^2$	$(f, E_{1113}^2)^{0101}$		
$F_{0222}^1$	$(f, E_{1131}^1)^{1010}$		
$F_{0222}^2$	$(f, E_{1131}^2)^{1010}$		

## Degré 7

Invariant	Transvectant	Invariant	Transvectant
$G_{3111}^1$	$(f, F_{2200})^{0100}$	$G_{5111}$	$(f, F_{4002})^{0001}$
$G_{3111}^2$	$(f, F_{4002})^{1001}$	$G_{1511}$	$(f, F_{0402})^{0001}$
$G_{3111}^3$	$(f, F_{2202}^1)^{0101}$	$G_{1151}$	$(f, F_{2040})^{1000}$
$G_{1311}^1$	$(f, F_{0402})^{0101}$	$G_{1115}$	$(f, F_{0024})^{0010}$
$G_{1311}^2$	$(f, F_{2200})^{1000}$	$G_{3311}$	$(f, F_{2400})^{0100}$
$G_{1311}^3$	$(f, F_{0202})^{0001}$	$G_{3131}$	$(f, F_{2022}^2)^{0001}$
$G_{1131}^1$	$(f, F_{0222}^1)^{0101}$	$G_{3113}$	$(f, F_{4002})^{1000}$
$G_{1131}^2$	$(f, F_{0222}^2)^{0101}$	$G_{1331}$	$(f, F_{0240})^{0010}$
$G_{1131}^3$	$(f, F_{2040})^{1010}$	$G_{1313}$	$(f, F_{0402})^{0100}$
$G_{1113}^1$	$(f, F_{2022}^1)^{1010}$	$G_{1133}$	$(f, F_{2022}^2)^{1000}$
$G_{1113}^2$	$(f, F_{2022}^2)^{1010}$		
$G_{1113}^3$	$(f, F_{0202}^1)^{0100}$		

## Degré 8

Invariant	Transvectant	Invariant	Transvectant
$H_{4000}$	$(f, G_{5111})^{1111}$	$H_{4200}$	$(f, G_{5111})^{1011}$
$H_{0400}$	$(f, G_{1311}^1)^{1011}$	$H_{4020}$	$(f, G_{5111})^{1101}$
$H_{0040}$	$(f, G_{1151})^{1111}$	$H_{4002}$	$(f, G_{5111})^{1110}$
$H_{0004}$	$(f, G_{1113}^3)^{1110}$	$H_{0420}$	$(f, G_{1311}^1)^{1001}$
$H_{2220}^1$	$(f, G_{1311}^1)^{0101}$	$H_{0402}$	$(f, G_{1313})^{1011}$
$H_{2220}^2$	$(f, G_{1311}^2)^{0101}$	$H_{0042}$	$(f, G_{1151})^{1110}$
$H_{2202}^1$	$(f, G_{3111}^3)^{1010}$	$H_{2400}$	$(f, G_{1311}^1)^{0011}$
$H_{2202}^2$	$(f, G_{1113}^2)^{0011}$	$H_{2040}$	$(f, G_{1151})^{0111}$
$H_{2022}^1$	$(f, G_{1113}^1)^{0101}$	$H_{2004}$	$(f, G_{1113}^1)^{0110}$
$H_{2022}^2$	$(f, G_{1113}^2)^{0101}$	$H_{0240}$	$(f, G_{1151})^{1011}$
$H_{0222}^1$	$(f, G_{1131}^1)^{1010}$	$H_{0204}$	$(f, G_{1113}^1)^{1010}$
$H_{0222}^2$	$(f, G_{1131}^2)^{1010}$	$H_{0024}$	$(f, G_{1113}^1)^{1100}$

## Degré 9

Invariant	Transvectant	Invariant	Transvectant
$I_{3111}$	$(f, H_{4020})^{1010}$	$I_{3311}^1$	$(f, H_{2220}^1)^{0010}$
$I_{1311}$	$(f, H_{2220}^1)^{1010}$	$I_{3311}^2$	$(f, H_{2220}^2)^{0010}$
$I_{1131}$	$(f, H_{0240})^{0110}$	$I_{3131}^1$	$(f, H_{4020})^{1000}$
$I_{1113}$	$(f, H_{2004})^{1001}$	$I_{3131}^2$	$(f, H_{2220}^1)^{0100}$
$I_{5111}^1$	$(f, H_{4020})^{0010}$	$I_{3113}^1$	$(f, H_{2004})^{0001}$
$I_{5111}^2$	$(f, H_{4002})^{0001}$	$I_{3113}^2$	$(f, H_{2022})^{0010}$
$I_{1511}^1$	$(f, H_{0402})^{0001}$	$I_{1331}^1$	$(f, H_{0240})^{0010}$
$I_{1511}^2$	$(f, H_{2400})^{1000}$	$I_{1331}^2$	$(f, H_{2220}^1)^{1000}$
$I_{1151}^1$	$(f, H_{0240})^{0100}$	$I_{1313}^1$	$(f, H_{0204})^{0001}$
$I_{1151}^2$	$(f, H_{0042})^{0001}$	$I_{1313}^2$	$(f, H_{0222}^1)^{0010}$
$I_{1115}^1$	$(f, H_{2004})^{1000}$	$I_{1133}^1$	$(f, H_{0024})^{0001}$
$I_{1115}^2$	$(f, H_{0024})^{0010}$	$I_{1133}^2$	$(f, H_{0222}^1)^{0100}$

## Degré 10

Invariant	Transvectant
$J_{4200}$	$(f, I_{5111})^{1011}$
$J_{4020}$	$(f, I_{5111})^{1101}$
$J_{4002}$	$(f, I_{3113})^{0111}$
$J_{0420}$	$(f, I_{1331})^{1011}$
$J_{0402}$	$(f, I_{1511})^{1110}$
$J_{0042}$	$(f, I_{1133})^{1101}$
$J_{2400}$	$(f, I_{1511})^{0111}$
$J_{2040}$	$(f, I_{3131})^{1101}$
$J_{2004}$	$(f, I_{3113})^{1110}$
$J_{0240}$	$(f, I_{1331})^{1101}$
$J_{0204}$	$(f, I_{1115})^{1011}$
$J_{0024}$	$(f, I_{1115})^{1101}$

## Degré 11

Invariant	Transvectant
$K_{3311}$	$= (f, J_{4200})^{1000}$
$K_{3131}$	$= (f, J_{4020})^{1000}$
$K_{3113}$	$= (f, J_{4002})^{1000}$
$K_{1331}$	$= (f, J_{0420})^{0100}$
$K_{1313}$	$= (f, J_{0402})^{0100}$
$K_{1133}$	$= (f, J_{0042})^{0010}$
$K_{5111}$	$= (f, J_{4200})^{0100}$
$K_{1511}$	$= (f, J_{2400})^{1000}$
$K_{1151}$	$= (f, J_{2040})^{1000}$
$K_{1115}$	$= (f, J_{2004})^{1000}$

## Degré 12

Invariant	Transvectant
$L_{6000}$	$= (f, K_{5111})^{0111}$
$L_{0600}$	$= (f, K_{1511})^{1011}$
$L_{0060}$	$= (f, K_{1151})^{1101}$
$L_{0006}$	$= (f, K_{1115})^{1110}$



## Annexe B

### Les formes normales de Chterental et Djokovic

Dans [39], Chterental et Djokovic donne une version corrigée du calcul de Verstraete [195] des formes normales des 4-qubits. Ils montrent qu'un 4-qubits est équivalent à une des neuf formes suivantes (à une permutation des indices près) pour l'action du groupe SLOCC.

$$F_1 := \frac{a+d}{2}(|0000\rangle + |1111\rangle) + \frac{a-d}{2}(|0011\rangle + |1100\rangle) + \frac{b+c}{2}(|0101\rangle + |1010\rangle) + \frac{b-c}{2}(|0110\rangle + |1001\rangle)$$

$$F_2 := \frac{a+c-i}{2}(|0000\rangle + |1111\rangle) + \frac{a-c+i}{2}(|0011\rangle + |1100\rangle) + \frac{b+c+i}{2}(|0101\rangle + |1010\rangle) + \frac{b-c-i}{2}(|0110\rangle + |1001\rangle) + \frac{i}{2}(|0001\rangle + |0111\rangle + |1000\rangle + |1110\rangle - |0010\rangle - |0100\rangle - |1011\rangle - |1101\rangle)$$

$$F_3 := \frac{a}{2}(|0000\rangle + |1111\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle) + \frac{b+1}{2}(|0101\rangle + |1010\rangle) + \frac{b-1}{2}(|0110\rangle + |1001\rangle) + \frac{1}{2}(|1101\rangle + |0010\rangle - |0001\rangle - |1110\rangle)$$

$$F_6 := \frac{a+b}{2}(|0000\rangle + |1111\rangle) + b(|0101\rangle + |1010\rangle) + i(|1001\rangle - |0110\rangle) + \frac{a-b}{2}(|0011\rangle + |1100\rangle) + \frac{1}{2}(|0010\rangle + |0100\rangle + |1011\rangle + |1101\rangle - |0001\rangle - |0111\rangle - |1000\rangle - |1110\rangle)$$

$$F_9 := a(|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle) - 2i(|0100\rangle - |1001\rangle - |1110\rangle)$$



$$F_{10} := \frac{a+i}{2}(|0000\rangle + |1111\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle) + \frac{a+1}{2}(|0101\rangle + |1010\rangle) \\ + \frac{a-i-1}{2}(|0110\rangle + |1001\rangle) + \frac{i+1}{2}(|1101\rangle + |0010\rangle) \\ - \frac{i-1}{2}(|0001\rangle + |1110\rangle) - \frac{i}{2}(|1000\rangle + |0111\rangle + |0100\rangle + |1011\rangle)$$

$$F_{12} := (|0101\rangle - |0110\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle) + (i+1)(|1001\rangle + |1010\rangle) \\ - i(|0100\rangle + |0111\rangle + |1101\rangle - |1110\rangle)$$

$$F_{14} := \frac{i+1}{2}(|0000\rangle + |1111\rangle - |0010\rangle - |11010\rangle) \\ + \frac{i-1}{2}(|0001\rangle + |1110\rangle - |0011\rangle - |1100\rangle) \\ + \frac{1}{2}(|0100\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |0111\rangle) \\ + \frac{1-2i}{2}(|1000\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |1011\rangle)$$

$$F_{16} := \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)(|000\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |111\rangle + i(|001\rangle + |010\rangle - |101\rangle - |110\rangle))$$

Les formes  $F_1, F_2, F_3, F_6, F_9$  et  $F_{10}$  sont semi-simples (leurs orbites sont semi-stables). Elles peuvent être identifiées en les évaluant sur les invariants  $\Delta, S, U := H^2 - 4(L - M), V := 12(HD - 2LM)$  et  $M$ ,

	$\Delta$	$S$	$U$	$V$	$M$
$F_1$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$F_2$	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$F_3$	0	$\times$	$\times$	0	$\times$
$F_6$	0	0	$\times$	$\times$	$\times$
$F_9$	0	0	0	0	0
$F_{10}$	0	$\times$	$\times$	0	0

Il est intéressant de constater que  $F_i$  est semi-stable si et seulement si son hyperdeterminant  $H(F_i)$  est non-nul.

Si on examine les racines de la quartique (4.27), on trouve :

Forme	racines de $X^4 - 2HX^3 + (H^2 + 2L + 4M)X^2 - (4D + 2HL)X + L$
$F_1$	4 racines simples
$F_2$	2 simples et 1 double
$F_3$	1 racine doubles égale à 0 et 2 simples
$F_6$	1 simple et 1 triple
$F_9$	1 quadruple
$F_{10}$	2 doubles, dont une est 0

Les formes  $F_{12}$ ,  $F_{14}$  et  $F_{16}$  sont nilpotentes (ou instables). Elles annulent tous les invariants. Pour pouvoir les distinguer nous avons besoin des covariants. Le covariant  $D_{0040}$  s'annule pour  $F_{14}$  mais pas pour  $F_{12}$  et le covariant  $B_{0220}$  ne s'annule que pour  $F_{16}$ .

La forme  $F_{16}$  est factorisable. Pour distinguer entre les états factorisables, on peut utiliser les covariants bi-quadratique de degré 2. En effet, pour une forme factorisée générique  $F = F_1 F_2$  où  $F_1$  est constituée des bits appartenant à  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$  et  $F_2$  est constituée des bits appartenant à  $J = \{j_1, \dots, j_l\}$  alors  $B_{k_1 k_2 k_3 k_4} = 0$  si et seulement si il existe deux indices  $i \in I$  et  $j \in J$  tel que  $k_i = k_j = 0$ . Par exemple, si  $F = (a_0|00\rangle + a_1|01\rangle + a_2|10\rangle + a_3|11\rangle)(b_0|00\rangle + b_1|01\rangle + b_2|10\rangle + b_3|11\rangle)$  alors

$$B_{2200}(F) = 2(a_0 x_0 y_0 + a_1 x_1 y_0 + a_2 x_0 y_1 + a_3 x_1 y_1)^2 \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$B_{0022}(F) = 2(b_0 z_0 t_0 + b_1 z_1 t_0 + b_2 z_0 t_1 + b_3 z_1 t_1)^2 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

et  $B_{2020}(F) = B_{2002}(F) = B_{0220}(F) = B_{0202}(F) = 0$ .



## Annexe C

# Une bibliothèque PsTrick dédiée aux polytopes de réflexions complexes

Il s'agit d'une bibliothèque, réalisée en collaboration avec Manuel Luque, permettant d'intégrer des dessins de projections de polytopes complexes réguliers dans un fichiers LaTeX. Elle est composée de deux programmes différents, le premier, `pst-coxcoor.sty`, propose une liste de polytopes complexes pré-calculés, le second `pst-coxeterp.sty` permet de dessiner les polytopes appartenant à une des séries infinies  $2\{p\}2$  (les polygones réels),  $2\{3\}2 \dots 2\{2\}2$  (simplexes),  $p\{4\}2$ ,  $2\{p\}4$ ,  $p\{4\}2\{3\}2$ ,  $2\{3\}2\{4\}p$ .

La commande `\CoxeterCoordinates[choice=num]` permet de dessiner le polytope de numéro `num` avec ses arêtes, ses sommets et les centres de ses faces.

Dans le tableau C.1 se trouve la liste des polytopes disponibles. Si on ne souhaite pas représenter l'un ou l'autre des éléments du polytope, on écrira simplement dans la liste des paramètres :

`[drawvertices=false,drawcenters=false,drawedges=false]`

Par défaut ces paramètres sont à `true`. Pour les polyèdres, il y a un paramètre supplémentaire `drawcentersfaces` qui est par défaut à `false` et qui permet d'afficher les centres des faces. Pour les polytopes de dimension supérieure, il y a encore un paramètre supplémentaire `drawcenterscells` qui est par défaut à `false` et qui permet d'afficher les centres des cellules.

**Exemple 1** Pour afficher les sommets, les centres des arêtes, des faces et

des cellules du polytope réel à 600 cellules (600-tope ou hypericosaedre, voir Fig. C.2) il suffit d'écrire

```
\begin{pspicture}(-3,-4)(3,4)
\psset{unit=1} \CoxeterCoordinates[
choice=35,linewidth=0.1mm,drawedges=false,
drawcenters=true, drawcentersfaces=true,drawcenterscells=true]
```

Son réciproque le 120-tope (voir Fig. C.3, peut être affiché grâce aux lignes de commande

```
\begin{pspicture}(-3,-4)(3,4)
\psset{unit=1}
\CoxeterCoordinates[
choice=36,linewidth=0.1mm,drawvertices=true,drawcenters=true]
\end{pspicture}
```

**Exemple 2** Le polytope de Witting (Fig. C.4) est le polytope autodual (*i.e.* égal à son réciproque à une isométrie près) complexe  $3\{3\}3\{3\}3\{3\}3$  dans la notation de Coxeter. Ses cellules sont des polytopes Hessiens (Fig. 5.2). Il peut être dessiné grâce à la commande

```
\begin{pspicture}(-4,-6)(4,6)
\psset{unit=2} \CoxeterCoordinates[
choice=11,linewidth=0.01mm,
drawcenters=true,
drawcentersfaces=true,
drawcenterscells=true]
\end{pspicture}
```

**Exemple 3** On peut combiner les polytopes. Dans la figure C.5, nous visualisons le fait que les sommets d'un polytope  $2\{4\}3\{3\}3$  sont les centres des arêtes d'un polytope Hessien.

```
begin{pspicture}(-2,-5)(2,5) \psset{unit=2}
\CoxeterCoordinates[drawvertices=false,
drawcenters=false,choice=8,linewidth=0.3mm,
```

---

```

    linecolor=blue]
\psset{unit=1.35}
\CoxeterCoordinates[drawvertices=false,choice=9,linewidth=0.01mm]
\end{pspicture}

```

La bibliothèque `pst-coxeterp` permet d'afficher des polytopes complexes de certaines séries infinies :

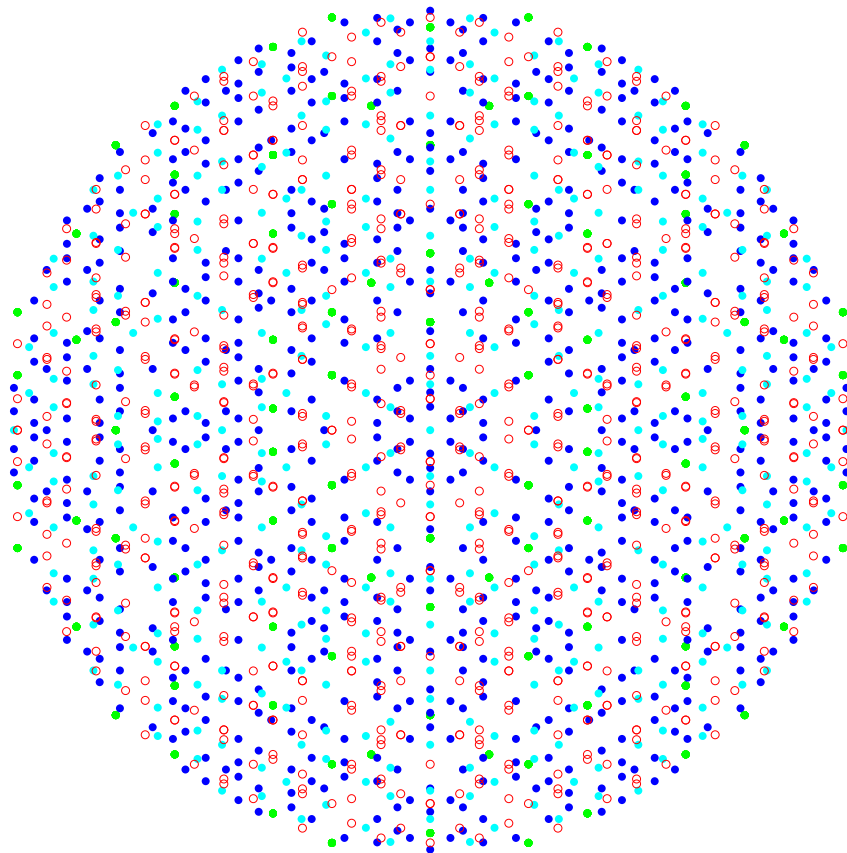
- Les polygones : `\Polygon[parameter=nb coté]`.
- Les simplex : `\Simplex[parameter=dimension]`.
- Les polygones complexes  $\gamma_2^p = p\{4\}2$  (voir Fig C.6) : `\CoxeterGammaTwoP[parameter=p]`.
- Les polygone complexes  $\beta_2^p = 2\{4\}p$  : `\CoxeterBetaTwoP[parameter=p]`.
- Les polyèdres complexes  $\gamma_3^p = p\{4\}2\{3\}2$  : `\CoxeterGammaThreeP[parameter=p]`.
- Les polyèdres complexes  $\beta_3^p = 2\{3\}2\{4\}p$  : `\CoxeterBetaThreeP[parameter=p]`.

Les calculs ont été réalisé à partir des résultats contenus dans [42].

choice=	polytope
1	$2\{3\}3$
2	$3\{3\}2$
3	$3\{3\}3$
4	$3\{4\}2$
5	$3\{4\}4$
6	$3\{4\}3$
7	$4\{3\}4$
8	$2\{4\}3\{3\}3$
9	$3\{3\}3\{3\}3$
10	$3\{3\}3\{4\}2$
11	$3\{3\}3\{3\}3\{3\}3$
12	$3\{8\}2$
13	$2\{8\}3$
14	$3\{5\}3$
15	$4\{4\}3$
16	$4\{3\}2^\dagger$
17	$2\{3\}4^\dagger$
18	$2\{6\}4$
19	$4\{6\}2$
20	$5\{3\}5$
21	$2\{10\}3$
22	$3\{10\}2$
23	$2\{5\}3^\dagger$
24	$3\{5\}2^\dagger$
25	$2\{4\}3$
26	$2\{3\}2\{4\}3$
27	$3\{4\}2\{3\}2$
28	$3\{4\}2\{3\}2\{3\}2$
29	$2\{3\}2\{3\}2\{4\}3$
30	$2\{3\}2\{5\}2$
31	$2\{5\}2\{3\}2$
32	$2\{3\}2\{3\}2\{4\}2$
33	$2\{4\}2\{3\}2\{3\}2$
34	$2\{3\}2\{4\}2\{3\}2$
35	$2\{3\}2\{3\}2\{5\}2$
36	$2\{5\}2\{3\}2\{3\}2$

Les polytopes marqués de  $^\dagger$  sont implementés mais présentent des défauts.

FIG. C.1 – Liste des polytopes dessinables à partir de pst-coxcoor.

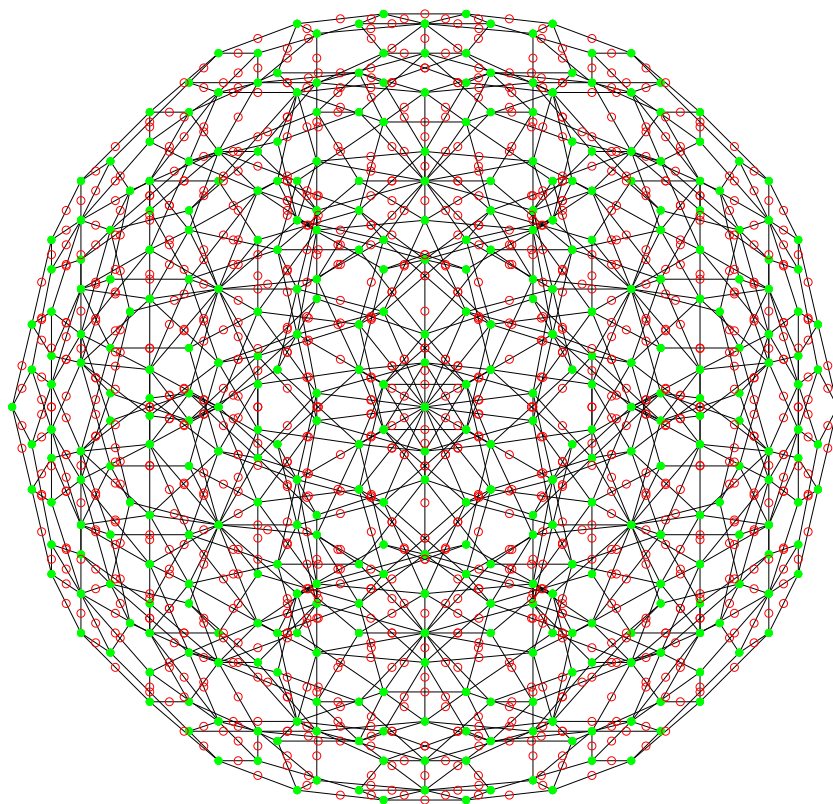


Les sommets sont notés en vert, le centre des arêtes en rouge, le centre des faces en bleu clair et le centre des cellules en bleu foncé.

Le groupe de symétrie de l'hypericosædre est  $2[5]2[3]2[3]2$  dans la notation de Coxeter (c'est à dire  $H_4$ ) et est d'ordre 1440. Il possède 120 sommets, 720 arêtes, 1200 faces triangulaires et 600 cellules icosædrales.

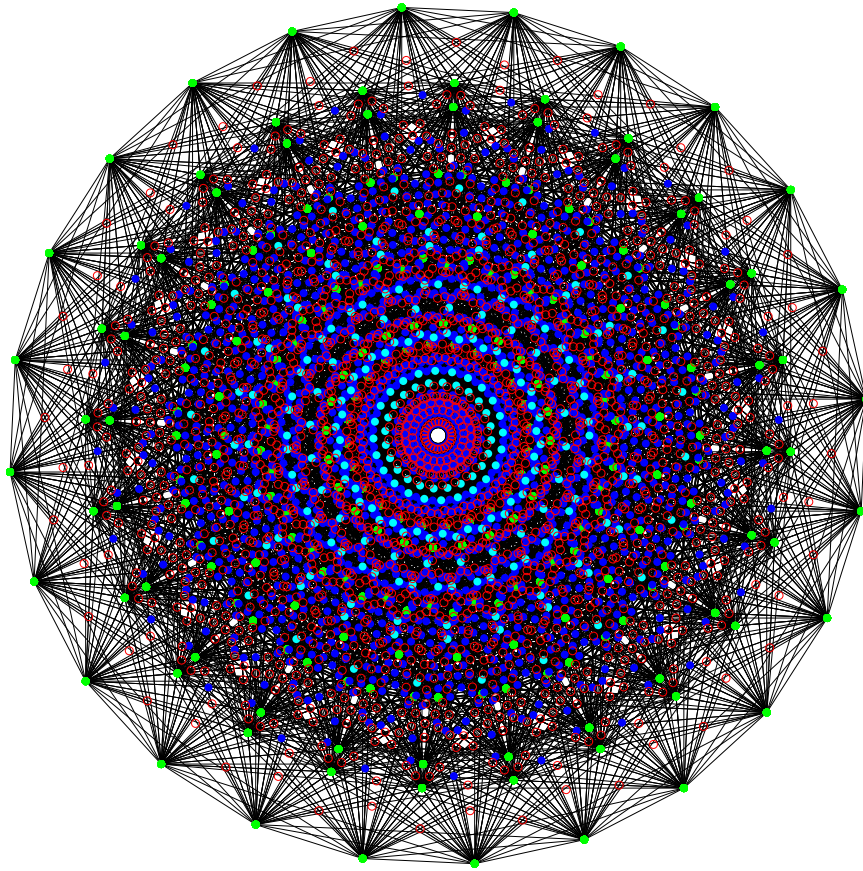
FIG. C.2 – Sommets et centres des arêtes, des faces et des cellules de l'hypericosædre





Il s'agit du polytope réciproque de l'hypericosædre, il possède 600 sommets, 1200 arêtes , 720 faces pentagonales et 120 cellules dodecædrales.

FIG. C.3 – 120-tope



Le polytope de Witting possède 240 sommets, 2160 arêtes de 3 sommets et 2160 faces de 8 sommets (formant un polygone  $3\{3\}3$  et 240 cellules de 27 sommets (formant un polygone Hessian). Son groupe de symétrie est d'ordre 155520 et apparaît dans le calcul des 27 droites d'une surface cubique plane.

FIG. C.4 – Polytope de Witting

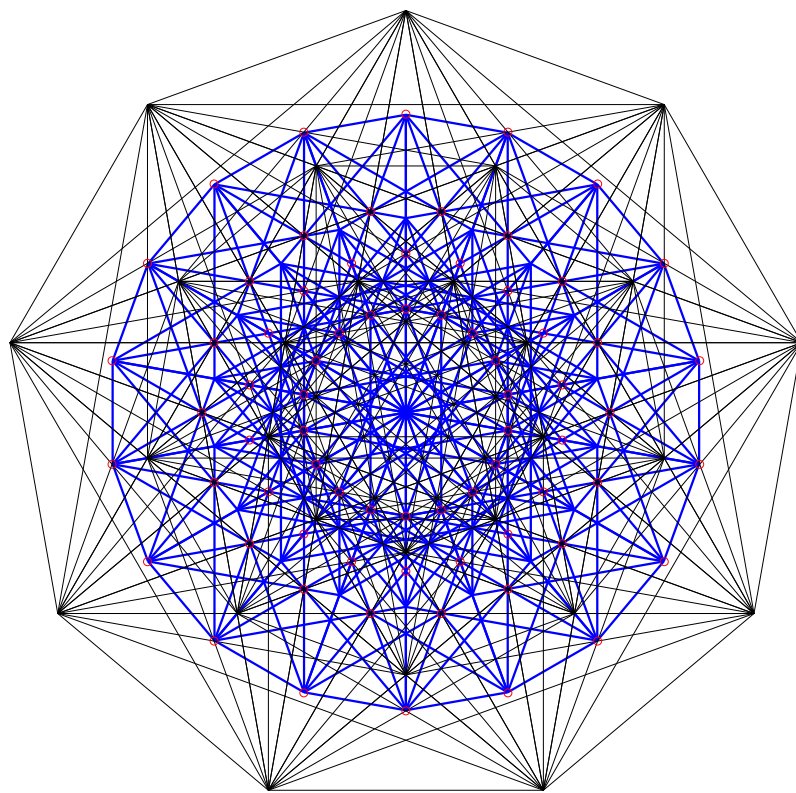


FIG. C.5 – Les centres des arêtes d'un polytope Hessien sont les sommets d'un polytope  $2\{4\}3\{3\}3$ .

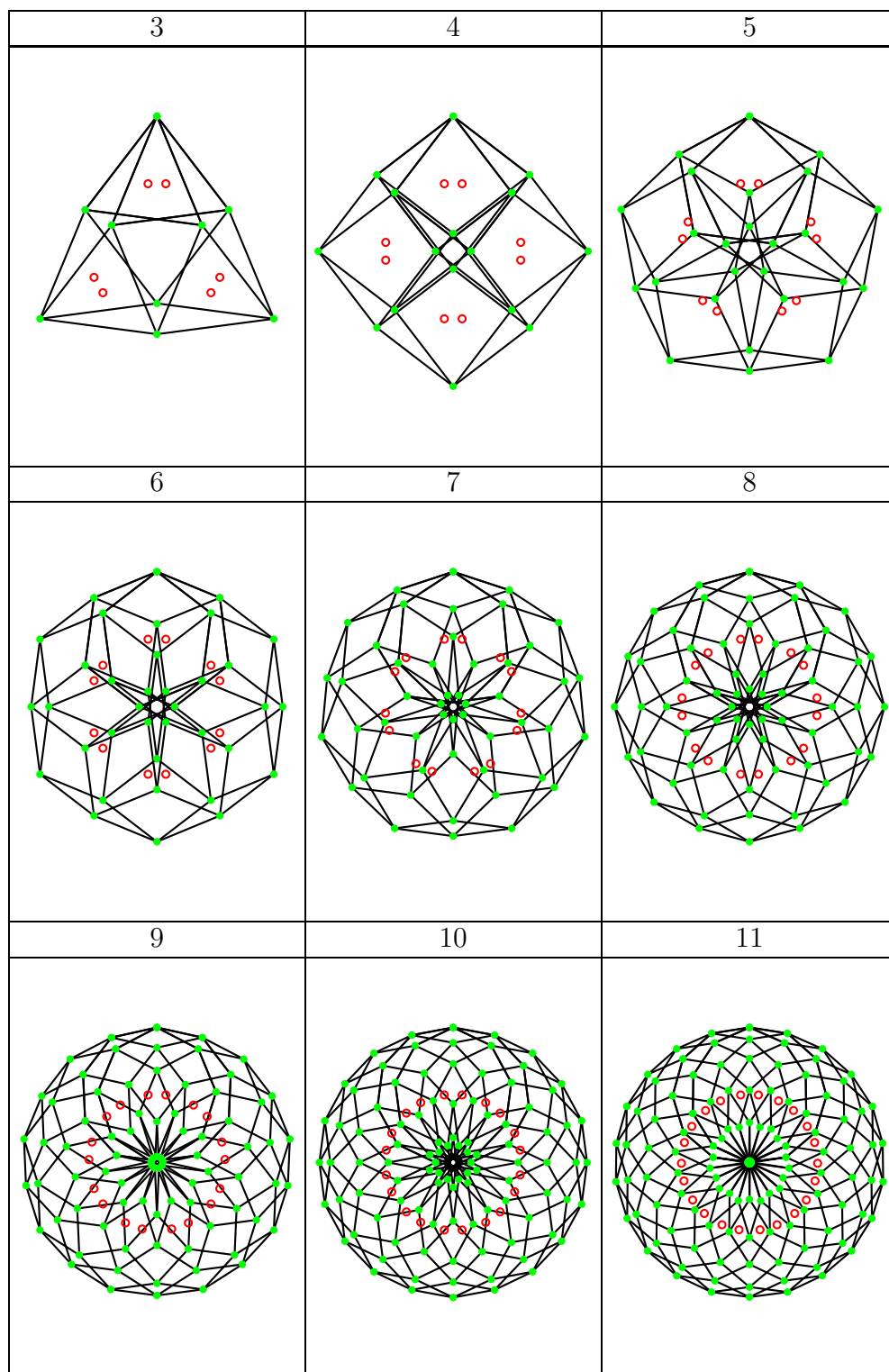


FIG. C.6 – Les polytopes complexes  $\gamma_2^p$ .



# Annexe D

## Les puissances du discriminant

La proposition 22 permet d'exprimer le coefficient d'une fonction de Schur  $S_\lambda$  dans le développement d'une puissance du discriminant comme un hyperdétérinant de Hankel décalé :

$$g_\lambda^{n,k} := \langle S_\lambda(\mathbb{X}), \Delta(\mathbb{X})^{2k} \rangle' = \pm \mathfrak{H}_{\text{renverse}(\lambda) - ((2k+1)(n-1))^n}^{k+1}(\mathbf{A}_0), \quad (\text{D.1})$$

où  $\mathbf{A}_0$  est l'alphabet vérifiant  $\Lambda^n(\mathbf{A}_0) = 0$  pour tout  $n > 0$  (par convention  $\Lambda^0(\mathbf{A}_0) = 1$ ). Autrement dit,

$$g_\lambda^{n,k} = \pm \mathcal{D}_{\lambda, \underbrace{0^n, \dots, 0^n}_{2k+1 \times}}, \quad (\text{D.2})$$

où

$$\mathcal{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} := \text{Det} \left( \delta_{\lambda_{n-i_1}^{(1)} + \dots + \lambda_{n-i_{2k}}^{(2k)} + i_1 + \dots + i_{2k}, (2k-1)n+1} \right)$$

si  $\delta_{i,j}$  est le symbole de Kronecker (valant 1 si  $i = j$  et 0 sinon) et  $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}$  sont des vecteurs décroissants de  $\mathbb{Z}^n$ .

En utilisant la proposition 22, on trouve une récurrence permettant de calculer les hyperdétérinants  $\mathcal{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}$  :

$$\mathcal{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} = \sum_I (-1)^{i_1 + \dots + i_{2k}} \mathcal{D}_{\mu_I^{(1)}, \dots, \mu_I^{(2k)}}, \quad (\text{D.3})$$

où la somme est sur les  $2k$ -uplets  $I = [1 = i_1, i_2, \dots, i_{2k}] \in \{1, \dots, n\}^{2k}$  tels que

$$\lambda_{n-i_1+1}^{(1)} + \dots + \lambda_{n-i_{2k}+1}^{(2k)} + i_1 + \dots + i_{2k} = (2k-1)n + 1,$$

et les  $\mu_I^{(i)}$  sont des vecteurs décroissants définis par

$$\begin{aligned}\mu_I^{(1)} &= [\lambda_1^{(1)} - 2(k-1), \dots, \lambda_{n-i_1}^{(1)} - 2(k-1), \\ &\quad \lambda_{n-i_1+2}^{(1)} - 2(k-1) - 1, \dots, \lambda_n^{(1)} - 2(k-1) - 1] \\ \mu_I^{(2)} &= [\lambda_1^{(2)} + 1, \dots, \lambda_{n-i_2}^{(2)} + 1, \lambda_{n-i_2+2}^{(2)}, \dots, \lambda_n^{(2)}] \\ &\quad \vdots \\ \mu_I^{(2k)} &= [\lambda_1^{(2k)} + 1, \dots, \lambda_{n-i_{2k}}^{(2k)} + 1, \lambda_{n-i_{2k}+2}^{(2k)}, \dots, \lambda_n^{(2k)}].\end{aligned}$$

Le calcul des  $\mathcal{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}$  a été implémenté en C par Adrien Boussicault et le développement des premières valeurs des puissances du discriminant sont disponibles à l'adresse [http ://www-igm.univ-mlv.fr/~luque/resultats](http://www-igm.univ-mlv.fr/~luque/resultats). Pour le discriminant le calcul a été fait pour tous les alphabets de taille inférieure ou égale à 10. Pour le carré, nous avons calculé le développement pour les alphabets de taille inférieure ou égale à 7. Pour le cube, nous avons traité le cas des alphabets de taille au plus 6 *etc*.

D'autres calculs concernant le développement des puissances du discriminant ainsi que du  $q$ -discriminant ont été réalisés par Wybourne et sont accessibles à l'adresse [http ://www.fizyka.umk.pl/~bgw/vanex.html](http://www.fizyka.umk.pl/~bgw/vanex.html).

# Bibliographie

- [1] A. Abdesselam, *Grassmann-Berezin calculus and theorems of the matrix-tree type*, Adv. Appl. Math. **33**, 51-70, 2004.
- [2] A. Acén, A. Adrianov, E. Jané, J.I. Latorre, R. Tarrach, *Generalized Schmidt decomposition and classification of three-quantum-bit states*, Phys. Rev. Lett. **85**, 1560-1563, 2000.
- [3] E. Altinisk, B.E. Sagan, N. Tuglu, *GCD matrices, posets and nonintersecting paths*, Linear and Multilinear algebra, **53** :2, 75-84, 2005.
- [4] G.W. Anderson, *A short proof of Selberg's generalized beta formula*, Forum Math. **3**, 415-417, 1991.
- [5] K. Aomoto, *The complex Selberg integral*, Quart. J. Math. Oxford, **38**, 385-399, 1987.
- [6] K. Aomoto, *Jacobi Polynomials associated to Selbeg integrals*, S.I.A.M. Journ. Math. Analysis, **18**, 545-549, 1987.
- [7] T. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.
- [8] A. Aspect, *Testing Bell's Inequalities*, in Quantum Reflections, J. Ellis and D. Amati ed., Cambridge University Press, 69-78, 2000.
- [9] A.A. Albert, *Quasigroups II*, Trans. Amer. Soc. **55**, 401-419, 1944.
- [10] N. Alon et M. Tarsi, *Coloring and orientations of graphs*, Combinatorica **12**, 125-143, 1992.
- [11] S. E. Bammel et J. Rothstein, *The number of  $9 \times 9$  Latin squares*, Discrete Math. **11**, 93-95, 1975.
- [12] D. Barsky, M. Carpentier, *Polynômes de Jacobi généralisés et intégrales de Selberg*, The electronic Journal of Combinatorics **3** : 2, 1996 (électronique).



- [13] A.I. Barvinok, *New algorithms for linear  $k$ -matroid intersection and matroid  $k$  parity problem*, Mathematical Programming, **69**, 449-470, 1995.
- [14] H. Belbachir, A. Boussicault, J.-G. Luque, *Hankel hyperdeterminants, rectangular Jack polynomials and even powers of the Vandermonde*, Preprint [arXiv :0709.3021](#).
- [15] C.H. Bennett, H.J. Bernstein, S. Popescu, B. Schumacher, *Concentrating partial entanglement by local operations*, Phys. Rev. A **53**, 2046-2052, 1996.
- [16] C. H. Bennett, G. Brassard, *Quantum cryptography : Public key distribution and coin tossing* , Proceeding of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, 175-179, 1984.
- [17] C.H. Bennet, D.P. DiVincenzo, J.A. Smolin, W.K. Wootters, *Mixed-state entanglement and quantum error correction*, Phys. Rev. A **54**, 3824-3851, 1996.
- [18] F.A. Berezin, *The method of second quantization*, Translated from the Russian by Nobumichi Mugibayashi and Alan Jeffrey. Pure and Applied Physics **24**, Academic Press, New York-London, xii+228, 1966.
- [19] S. Beslin, S. Ligh, *Another generalization of Smith's determinant*, Bull. Austral. Math. Soc. **40**, 413-415, 1989.
- [20] G. Boole, *Exposition of a general theory of linear transformation*, Camb. Math. J. **3**, 1-20, 1841
- [21] A. Boussicault et J.-G. Luque, *Staircase Macdonald polynomials and the  $q$ -Discriminant*, En cours de rédaction.
- [22] G.K. Brennen, *An observable measure of entanglement for pure states of multi-qubit systems*, Quantum. Inf. Comput. **3**, 619-626 (2003).
- [23] E. Briand, J.-G. Luque et J.-Y. Thibon, *A complete system of covariants of the four qubit system*, Journal of Physics A : Math. Gen. **38**, 9915-9927, 2003.
- [24] E. Briand, J.-G. Luque, J.-Y. Thibon, *The moduli space of the three qutrit states*, J. Math. Phys. **45**, 4855-4867, 2004.
- [25] J.-L. Brylinski, *Algebraic measures of entanglement*, in Mathematics of quantum computation, 3-23, Comput. Math. Ser., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.

- [26] J.-L. Brylinski and R. Brylinski, *Invariant polynomial functions on k qubits*, in Mathematics of quantum computation, 277-286, Comput. Math. Ser., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.
- [27] J. W. Brown, *Enumeration of Latin squares with application to order 8*, J. Combin. Theory **5**, 177-184, 1968.
- [28] H. Caterlet, A. Higuchi, A. Sudberry, *Multipartite generalization of the Schmidt decomposition*, J. Math. Phys. **41**, 7932-7939, 2000.
- [29] A. Cayley, *On the notations and properties of certain function resolvable into a series of determinants*, Trans. of. the Cambridge Phil. Soc. **8** Part. I, 2-43, 1844.
- [30] A. Cayley, *On the theory of determinants*, Transaction of the Cambridge Philosophical Society **8**, 1-16, 1843.
- [31] A. Cayley, *Mémoire sur les hyperdéterminants*, J. reine u. angew. Math. **30**, 1-37, 1846.
- [32] A. A. Cayley, *On the theory of permutants*, Cambridge and Dublin Mathematical Journal **30**, 1-37, 1843.
- [33] A. Cayley, *On Linear Transformation*, Camb. and Dublin Math. J. **1** 104-122, 1845 et dans *The Collected Mathematical Papers* **1**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 95-112, 1889.
- [34] A. Cayley, *An introductory memoir upon quantic*, Phil. Trans. Roy. Soc. **144**, 244-258, 1854 et dans *The Collected Mathematical Papers* **2**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 221-234, 1889.
- [35] A. Cayley, *A Second memoir upon quantics*, Phil. Trans. Roy. Soc. **146**, 101-126, 1856 et dans *The Collected Mathematical Papers* **2**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 250-275, 1889.
- [36] A. Cayley, *On Latin squares*, Oxford Camb. Dublin Messenger of Math. **19**, 135-137, 1890.
- [37] J.H. Chanler, *The invariant theory of the ternary trilinear form*, Duke Math. J. **5**, 552-568, 1993.
- [38] K.T. CHEN, *Iterated Integrals and exponential homomorphisms*, Proc. London. Math. Soc. **4**, 502-512, 1853.
- [39] O. Chterental, D. Z. Djoković, *Normal forms and tensor ranks of pure states of four qubits*, preprint arXiv :quant-ph/0612184, Chapitre dans un livre à paraître : " Linear Algebra Research Advances", Nova Science Publishers, Inc.

- [40] A. Clebsch, *Theorie der Binären Algebraischer Formen*, B.G. Teubner, Leipzig, 1872.
- [41] J.L. Coolidge, *A treatise on the circle and the sphere*, Oxford University Press, 1916.
- [42] H.S.M. Coxeter, *Regular complex polytopes*, Cambridge University Press, Second edition 1991.
- [43] A Debiard, *Système différentiel hypergéométrique et parties radiales des opérateurs invariants des espaces symétriques de type  $BC_p$* , in Séminaire d'algèbre, M-PMalliavin ed. Springer Lecture Notes in Math. **1293**, 42-124, 1988.
- [44] N.G. de Bruijn, *On some multiple integrals involving determinant*, J. Indian Math. Soc. (N.S.), **19**, 133-151, 1956.
- [45] P. Di Francesco, M. Gaudin, C. Itzykson, F. Lesage, *Laughlin's wave functions, Coulomb gases and expansions of the discriminant*, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 4257-4351, 1994.
- [46] I. Dolgachev, *Weighted projective varieties*, in Group actions and vector fields (B.C. Vancouver 1981), Springer, Berlin, volume 956 of *Lecture Notes in Math.*, 34-72, 1981.
- [47] V.S. Dotsenko, V.A. Fateev, *Four-point correlations functions and the operator algebra in 2D conformal invariant theories with central charge  $C \leq 1$* , Nucl. Phys. B, **251**, 691-734, 1985.
- [48] A.A. Drisko, *Proof of the Alon-Tarsi Conjecture for  $n = 2^r p$* , The electronic journal of combinatorics **5**, 1998 (électronique).
- [49] W. Dür, G. Vidal, and J.I. Cirac, *Three qubits can be entangled in two inequivalent ways*, Phys. Rev. A **62** 062314, 2001.
- [50] A. Duschek, *Eine Abbildung des binären Trilinearform*, Jahresber. Dtsch. Math. Ver. **32**, 234-239, 1923.
- [51] F.J. Dyson, *Statistical theory of energy levels of complex system I*, J. Math Phys, **3**, 140-156, 1962.
- [52] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can quantum mechanic description of physical reality be considered complete*, Phys. Rev. **47** 777-780, 1935.
- [53] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer-Verlag New-York, Inc., 1995.

- [54] A. Ekert, *Quantum cryptography based on Bell's theorem*, Phys. Rev. Lett. **67**, 661-663, 1991.
- [55] C. Emary, *A bipartite class of entanglement monotones for N-qubit pure states*, J. Phys. A : Math. Gen. **37**, 8293-8302, 2004.
- [56] L. Euler, *Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques*, Verh. v. h. Zeeuwsch Genootsch. der Wetensch., Vlissingen **9** 85-239, 1782.
- [57] F. Faà di Bruno, *Einleitung in die Theorie der binären formen*, B.G. Teubner, Leipzig, 1881.
- [58] C.S. Fisher, *The Death of a Mathematical Theory : a Study in the Sociology of Knowledge* in Archive for History of Exact Science **3**, 2, 137-159, 1966.
- [59] R.A. Fisher et F. Yates, *The  $6 \times 6$  latin squares*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **30**, 495-507, 1934.
- [60] M. Fitzi, N. Gisin, U. Maurer, *A quantum solution to the Byzantine agreement problem*, Phys. Rev. Lett. **87**, 217901.
- [61] P.J. Forrester, *Random matrices, log gases and the Calogero-Sutherland model*, in Quantum manybody problems and representation theory, 97-181, MSJ Mem **1**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1998.
- [62] P. Forrester, *Log-gases and Random matrices*, Chapitre 3, [http ://www.ms.unimelb.edu.au/~matpjf/matpjf.html](http://www.ms.unimelb.edu.au/~matpjf/matpjf.html)
- [63] I.M. Gelfand, M.M. Krapranov, A.V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 523 pp, 1994.
- [64] F. Gherardelli, *Remarks on hyperdeterminants* (Italian), Instit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **127** :1, 107-113, 1993.
- [65] C.W. Gilham, *The complete system of concomitants of a multiple binary form*, J. London Math. Soc. **4**, 166-171, 1929
- [66] C.W. Gilham, *A rational basis for the concomitants of a multiple binary form*, J. London Math. Soc. **6**, 203-209, 1931
- [67] C.W. Gilham, *The complete system of the binary  $(2, 1, 1)$  form*, Proc. London Math. Soc. (2) **32**, 259-272, 1931
- [68] C.W. Gilham, *A note on the complete system of the binary  $(2, 1, 1)$  form*, Proc. London Math. Soc. **38** :2, 271-272, 1935

- [69] L. Gegenbauer, *Über Determinanten höheren Ranges*, Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, Vienne, **43**, 17-32, 1882.
- [70] I.J. Good, *Short proof of a conjecture by Dyson*, J. Math. Phys, **11**, p1884, 1970.
- [71] P. Gordan, *Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganz Funktion mit numerischen Coefficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist*, J. Reine Angew. Math **69**, 323-254, 1868.
- [72] P. Gordan, *Ueber ternäre Formen dritten Grades*, Math. Ann. **1**, 90-128, 1869.
- [73] M. Grassl, M. Rötteler and T. Beth, *Computing local invariants of qubit systems*, Phys. Rev. A **58** :3, 1833-1839, 1998.
- [74] M. Grassl, *Entanglement and invariant theory*, transparencies of a talk reporting on joint work with T. Beth, M. Rötteler and Yu. Makhlin, available at [http://iaks-www.ira.uka.de/home/grassl/paper/MSRI\\_InvarTheory.pdf](http://iaks-www.ira.uka.de/home/grassl/paper/MSRI_InvarTheory.pdf)
- [75] D.M. Greenberger, M.A. Horne and A. Zeilinger, *Going beyond Bell's theorem*, in Bell's Theorem, Quantum Theory and Conception of the Universe, ed. M. Kafatos, Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 73-76, 1989.
- [76] J. Gunson, *Proof of a Conjecture of Dyson in the Statistical Theory of Energy Levels*, J. Math. Phys. **3**, 752-753, 1962.
- [77] J. Harris, *Algebraic Geometry, a first course*, Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [78] P. Haukkanen, *Higher-Dimensionnal GCD matrices*, Linear Algebra Appl. **170**, 53-63, 1992.
- [79] P. Haukkanen, *On meet matrices on posets*, Linear Algebra and its applications **249**, 111-123, 1996.
- [80] Heine, H.E., *Handbuch der Kugelfunktionen*, 2 vol., (2nd edition, Berlin), 1878, 1881.
- [81] D. Heiss (ed.), *Fundamentals of Quantum Information*, Springer 2002.
- [82] D. Hilbert, *Über die Theorie der algebraischen Formen*, Math. Ann. **36**, 473-534, 1890.

- [83] D. Hilbert , *Über die vollen Invariantensysteme*, Math. Ann. **42**, 313-373.
- [84] D. Hilbert, *Theory of algebraic invariants*, Library of Congress cataloguing in publication data, translated by R. C. Leubenbacher, Ed. Bernd Sturmfels, Cambridge university press, 1993
- [85] F.L. Hitchcock, *A new method in the theory of quantics*, J. Math. and Phys. **8**, 81-105, 1929.
- [86] F.L. Hitchcock, *The expression of a tensor or polyadic as a sum of products*, J. Math. and Phys. **6**, 164-189, 1927.
- [87] F.L. Hitchcock, *Multiple invariants and generalized rank of a p-way matrix or tensor*, J. Math. and Phys. **7**, 40-79, 1927.
- [88] M. Hochster, J. L. Roberts, *Rings of invariants of reductive group acting on regular rings are Cohen-Macaulay*, Adv. in Math. **13**, 115-175, 1974.
- [89] E. Kasner, *The invariant theory of the inversion group : geometry upon a quadric surface*, Trans. Amer. Math. Soc. **1**, 430-498, 1900.
- [90] E. Kasner, *The cogredient and digredient theories of multiple binary forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **4**, 86-102, 1900.
- [91] M. Isahikawa, S. Okada, H. Tagawa et J. Zeng, *Generalizations of Cauchy's Determinant and Schur's Pfaffian*, archiv math.CO/0411280.
- [92] M. Ishikawa, M. Wakayama, *Minor summation formula of Pfaffians*, Linear and Multilinear Algebra **39**, 285-305, 1995.
- [93] H. Jack, *A class of polynomial with a parameter*, Proc. R. Soc. Edinburgh (A) **69**, 1-18, 1970
- [94] H. Jack, *A surface intagral and symmetric functions*, Proc. R. Soc. Edinburgh (A) **69**, 347-363, 1972.
- [95] J Kaneko, *Selberg integrals and hypergeometric fuctions associated with Jack polynomials*, S.I.A.M. Journal Math. Analysis **24** ,1086-1110, 1993.
- [96] S. Karlin, G. Szegö, *On certain determinants whose elements are orthogonal polynomials*, Journal d'Analyse Math. **8**, 1-157, 1961.
- [97] D. Kaszlikowski, D. Gosal, E. J. ling, L.C. Kwek, M. Ukowski, C. H. Oh, *Three-qutrit correlations violate local realism more strongly than those of three qubits*, Phys. Rev. A **66**, 032103, 2002.

- [98] G Kempf, L Ness, *Lengths of vector un representation spaces*, 233-244, Lect. Notes. Math., Springer Verlag, 1979.
- [99] F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von fünften Grade*, Teubner-Archiv zur Mathematik, Leipzig, 1993.
- [100] R.C. King, F. Toumazet, B.G. Wybourne, *The square of the Vandermonde determinant and its  $q$ -généralization*, J. Phys. A :Math. Gen. **37**, 735-767, 2004.
- [101] A.A. Klyachko, *Coherent states, entanglement, and geometric invariant theory*, quant-ph/0206012
- [102] A.A. Klyachko and A.S. Shumovsky, *Entanglement, local measurements and symmetry*, Wigner centennial (Pécs, 2002); J. Opt. B Quantum Semiclass. Opt. **5**, 322-328, 2003.
- [103] A Korányi, *Hua-type integrals, hypergeometric functions and symmetric polynomials*, International Symposium in Memory of Hua Loo Keng, Vol. II Beijing, 1988, 169-180, Springer, Berlin, 1991.
- [104] C. Krattenthaler, *Advanced determinantal calculus : a complement*, Linear Algebra Appl. **411**, 68-166, 2005.
- [105] A. Lascoux, J.-G. Luque, J.-Y. Thibon, *A  $(q, t)$ -deformation of the Jacobi-Trudi formula for Macdonald polynomials*, en cours de rédaction.
- [106] M Lassalle, *Polynômes de Jacobi généralisés*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **312**, 425-428, 1991.
- [107] M Lassalle, *Polynômes de Laguerre généralisés*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **312**, 725-728, 1991.
- [108] M Lassalle, *Polynômes de Hermite généralisés*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **313**, 579-582, 1991.
- [109] L. Lamport, R. Shostak, M. Pease, *The Byzantine Generals Problem*, ACM Trans. Programming Languages Syst. **4**, 382-401, 1982.
- [110] L. Lapointe, A. Lascoux, J. Morse, *Determinantal expressions for Macdonald polynomials*, Internat. Math. Res. Notices **18**, 957-978, 1998.
- [111] A. Lascoux, *Multiplicative functions*,  
[http ://www.combinatorics.net/lascoux/courses/dvi\\_ps/Moebiusps.rar](http://www.combinatorics.net/lascoux/courses/dvi_ps/Moebiusps.rar).

- [112] A Lascoux, Symmetric function and combinatorial operators on polynomials, CBMS 99, American Mathematical Society, 2001.
- [113] A. Lascoux, *Addition of 1*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 8pp (électronique), 2004.
- [114] A. Lascoux, J.-Y. Thibon, *Vertex operators and the class algebras of symmetric groups*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 283, Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody 6, 156-177, 261, 2001.
- [115] R.B. Laughlin, *Anomalous Quantum Hall Effect : An incompressible Quantum fluid with fractionally charged excitation*, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395-1398, 1983.
- [116] M. Lecat, *Leçon sur la théorie des déterminants à  $n$  dimensions avec applications à l'algèbre, à la géométrie, etc.*, AD. Hoste, Gand, 1910.
- [117] M. Lecat, *Coup d'oeil sur la théorie de la multiplication des déterminants supérieurs dans son état actuel*, Ann. Soc. Sci. de Bruxelles, **46**, 1-16, 1926.
- [118] M. Lecat, *Quelques propriétés des déterminants supérieurs orthosymétriques, circulats et cycliques*, Mathematische Zeitschrift **25** 1, 121-131, 1926.
- [119] M. Lecat, *Le déterminant supérieur, Qu'est-il exactement ?*, Rev. Gén. Sci. Pur. et App., **40** 8, 231, 1929.
- [120] M. Lecat, *Coup d'œil sur les applications des déterminants supérieurs*, Louvain, Ceuterick, 1929.
- [121] B. Leclerc, *On certain formulas of Karlin and Szegö*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire **41**, 21pp, 1998 (électronique).
- [122] D.H. Lehmer, *The  $p$  dimensionnal analogue of Smith's determinant*, Amer. Math. Monthly **37**, 294-296, 1930.
- [123] C. Le Paige, *Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algébriques à la géométrie*, Mém. couronnés et mém. savants étranger. publiés Acad. Roy. sci. Belgique **42**, 1-71, 1879.
- [124] C. Le Paige, *Sur les formes trilinéaires*, C.R. Acad. Sci. Paris **92**, 1103-1105, 1881.
- [125] C. Le Paige, *Sur la théorie des formes binaires à plusieurs séries de variables*, Bull. Acad. Roy. Sci. Belgique (3), bf 2, 40-53, 1881.



- [126] C. Le Paige, *Sur la forme quadrilinéaire*, Atti Acc. R. di Sc. Torino **17**, 299-319, 1881-82.
- [127] Z. Li, *The determinant of gcd matrices*, Linear Algebra Appl. **134**, 137-143, 1989.
- [128] B. Lindström, *Determinant on semilattices*, Proc. Amer. Soc. **20**, 207-208, 1969.
- [129] F. London, *Zur Theorie der trilinearen Verwandtschaft dreier einstufiger Grundgebilde*, Math. Annalen **44**, 375-412, 1894.
- [130] J.-G. Luque, *Hyperdeterminants on semilattices*, à paraître dans Linear and Multilinear Algebra, 2007.
- [131] J.G. Luque et M. Luque, pst-coor.sty, téléchargeable depuis l'adresse <http://www-igm.univ-mlv.fr/luque/article.html>.
- [132] J.-G. Luque et J.-Y. Thibon, *Pfaffian and Hafnian identities in shuffle algebra*, Advances in Applied Mathematics **29**, 620-646, 2002
- [133] J.-G. Luque and J.-Y. Thibon, *Polynomial invariants of four qubits*, Phys. Rev. A **67**, 042303, 2003.
- [134] J-G. Luque and J.-Y. Thibon, *Algebraic invariants of five qubits*, J. Phys. A Math. Gen. **39**, 371-377, 2005.
- [135] J.-G. Luque et J.-Y. Thibon, *Hankel hyperdeterminants and Selberg integrals*, J.Phys.A : Math. Gen. **36**, 5267-5292, 2003.
- [136] J.-G. Luque et Jean-Yves Thibon, *Hyperdeterminantal calculations of Selberg's and Aomoto's integrals*, Molecular Physics **102** : 11-12, 1351-1359, 2004.
- [137] J.-G. Luque, J.-Y. Thibon, F. Toumazet, *Unitary invariants of qubit systems*, Mathematical Structures in Computer Science (à paraître).
- [138] I.G. Macdonald, *Symmetric function and Hall polynomial*, 2nd ed, Oxford universiy press, 1995.
- [139] P.A. Macmahon, *Combinatorics Analysis*, Cambridge, 1915.
- [140] G. Masbaum, A. Vaintrob, *A new matrix-tree theorem*, Int. Math. Res. Not. **27**, 1397-1426, 2002.
- [141] H. Maschke, *Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternären Gruppe von 51840 linearen Substitutionen*, Math. Ann. **33**, 317-344, 1889.

- [142] B. D. McKay et E. Rogoyski, *Latin squares of order ten*, Electron. J. Combinatorics **2** : 3, 4pp, 1995 (électronique).
- [143] B. D. McKay, A. Meynert et W. Myrvold, *Small Latin Squares, Quasigroups and Loops.*, J. Combin. Des. **15** :2, 98–119, 2007.
- [144] B. D. McKay et I. M. Wanless, *Latin squares of order eleven*, Preprint 2004  
[http ://cs.anu.edu.au/ bdm/papers/ls11.pdf](http://cs.anu.edu.au/bdm/papers/ls11.pdf)
- [145] Y.I. Manin, *Cubic forms* volume 4 de *North-Holland Mathematical Library*, (Noth-Holland Publishing Co. Amsterdam), second edition, 1986.
- [146] S. Matsumoto, *Two parameters circular ensembles and Jacobi-Trudi type formulas for Jack polynomials of rectangular shape*, arXiv :math.PR/0608751 v1.
- [147] M. L. Mehta, *Random matrices*, 2nd ed., Academic Press, 1991.
- [148] W. F. Meyer, *Allgemeine Formen und Invariantentheorie*, Bd. 1, *Binäre Formen*, G.J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig, 1909.
- [149] W.F. Meyer, *Berich über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker -Vereinigung **1**, 1890.
- [150] D.A. Meyer and N.R. Wallach, *Global entanglement in multiparticle systems*, Quantum information theory, J. Math. Phys. **43**, 4273-4278, 2002.
- [151] A. Miyake, *Classification of multipartite entangled states by multidimensional determinants*, Phys. Rev. A (3) **67**, 012108, 2003.
- [152] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, Springer, Berlin, 1994.
- [153] A. G. Nurmiev, *Closures of nilpotent orbits of cubic matrices of order three* , Uspekhi Matematicheskikh Nauk **55** :2 (232) 143-144, 2000.
- [154] A. G. Nurmiev, *Orbits and invariants of cubic matrices of order three*, Sbornik Mathematics, **191** :5, 717-724, 2000.
- [155] P. Olver, *Classical invariant theory*, Cambridge University Press, Cambridge, London 1999.
- [156] P. Orlik, L Solomon, *Arrangements defined by unitary reflection groups*, Math. Ann. **261**, 339-257, 1982.

- [157] A. Osterloh, J. Siewert, *Constructing  $N$ -qubit entanglement monotonies from anti-linear operators*, Phys. Rev. A **72**, 012337, 2005.
- [158] M. Pasch, *Ueber eine Invariante des trilinearen ternären formen*, Math. Ann. **52**, 127-129, 1889.
- [159] G. Peano, *Formazione invariante della corrispondanza*, Giornale di Matematiche **20**, 79-101, 1882.
- [160] K.A. Penson, J.-M. Sixdenier, *Integral representation of Catalan and related numbers*, J. of Integer Sequences, **4**, Art. 01.2.5 (électronique), 2001.
- [161] E.M. Rains, *Polynomial invariants of quantum codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **46** :1, 54–59, 2000.
- [162] D. Redelmeier, *Hyperpfaffians in Algebraic Combinatorics*, Phd University of Waterloo, Ontario Canada, 2006.
- [163] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Oxford University Press, 1993.
- [164] L.H. Rice,  *$P$ -way determinants with application to transvectants*, Amer. J. Math. **40**, 242-262, 1918.
- [165] L. H. Rice, *Some determinant expansion*, Am. Journ. of Math. **42**, 237-242, 1920
- [166] L.H. Rice, *Compound of Cayley products of determinants of higher class*, J. of Math. Phys. **6** :3 ,33-38, 1926.
- [167] L.H. Rice, *Introduction to Higher determinants*, Journal of Mathematics and Physics, vol. 9, 47-70, 1930.
- [168] W. Saddler, *Triple binary forms; the complete system for a single  $(1,1,1)$  form with its geometrical interpretation*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **22** , 688-693, 1925.
- [169] T Scharf, J-Y Thibon, B G Wybourne, *Powers of the Vandermonde determinant and the quantum Hall effect*, J. Phys. A : Math. Gen. **27**, 4211-4219, 1994.
- [170] J. Schlienz and G. Mahler, *The maximal entangled three-particle state is unique*, Phys. Lett. A, **224**, 39-44, 1996.
- [171] J. Schlienz and G. Mahler, *Description of entanglement* Phys. Rev. A **52**, 4396-4404, 1995.
- [172] H. Schubert, *Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden*, Math. Ann. **17** :4, 457-472, 1880.

- [173] E. Schwartz, *Ueber binäre trilineare Formen*, Math. Zeitschr. **12**, 18-35, 1922.
- [174] C. Segre, *Sulle corrispondenze quadri-lineari tra forme di 1<sup>a</sup> specie e su alcune loro rappresentazioni spaziali*, Annali di Matematica, Serie III, Tomo XXIX, 105-140, 1922.
- [175] H. W. Norton, *The  $7 \times 7$  squares*, Ann. Eugenics **9**, 269-307, 1939.
- [176] A. Selberg, *Bemerkninger om et multiplet integral*, Norsk Matematisk Tidsskrift, **26**, 71-78, 1944.
- [177] I.R. Shafarevich, ed., *Algebraic geometry. IV*, vol 55, of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences* Springer Verlag, Berlin 1994.
- [178] P.W. Shor, *Algorithms for quantum computation : discrete logarithm and factoring*, Proc. of 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science, IEEE Computer Society, edited by S. Goldwasser, Los Alamitos p124-134, 1994.
- [179] G.C. Shephard, J.A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canad J. Math. **6**, 274-304, 1954.
- [180] Sokolov, N.P., *Les matrices spaciales et leurs applications*, Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Math.Lit., Moscow), en Russe, 1960.
- [181] Sokolov, N.P., *Introduction à la théorie des matrices multidimensionnelles*, Kiev : Nukova Dumka, En Russe, 1972.
- [182] H.J.S. Smith, *On the value of certain arithmetical determinant*, Proc. London Math. Soc. **7** :1, 208-212, 1876.
- [183] *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*,  
[http ://www.research.att.com/~njas/sequences/](http://www.research.att.com/~njas/sequences/)
- [184] J. STEMBRIDGE, *Non intersecting paths and Pfaffians*, Adv. in Math. **83**, 96-131, 1990.
- [185] R.M. Thrall, *On projective equivalence of trilinear forms*, Ann. Math. **42**, 469-485, 1941.
- [186] R.M. Thrall and J.H. Chanler, *Ternary trilinear forms in the field of complex numbers*, Duke Math. J. **4**, 678-690, 1938.
- [187] J.A. Todd, *The complete system of the binary (3, 1) form*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **42**, 196-205, 1946.
- [188] J.A. Todd, *The complete system of the binary (4, 1) form*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **42**, 206-216, 1946.

- [189] H.W. Turnbull, *Gordan's theorem for double binary forms*, Proc. Edin. Math. Soc. **xli** 116-127, 1922-23.
- [190] H.W. Turnbull, *Double binary forms*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **43**, 43-50, 1923.
- [191] H.W. Turnbull, *A Geometrical interpretation of the complete system of the double binary (2, 2) form*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **44**, 23-50, 1923-34.
- [192] A.T. Vandermonde, *Remarques sur les problèmes de situation*, Mém. de l'Acad. royale des Sciences, p556, 1771.
- [193] V. Vedral, M.B. Plenio, *Entanglement measures and purification procedures*, Phys. Rev. A **57**, 1619-1633, 1996.
- [194] F. Verstraete, J. Dehaene, B. de Moor, *Normal forms and entanglement measures for multipartite quantum states*, Phys. Rev. A **68**, 012103, 2003.
- [195] F. Verstraete, J. Dehaene, B. De Moor and H. Verschelde, *Four qubits can be entangled in nine different ways*, Phys. Rev. A **65**, 052112, 2002.
- [196] L. Vretare, *Formulas for elementary spherical functions and generalized Jacobi polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **15**, 805-833, 1974.
- [197] G. Vidal, *Entanglement monotones*, J. Mod. Opt, **47**, 355-368, 2000.
- [198] E.B. Vinberg, *On the linear groups associated to periodic automorphisms of semi-simple algebraic groups*, Soviet Math. Dokl **16**, 406-409, 1975.
- [199] E.B. Vinberg, *On the classification of nilpotent elements of graded Lie algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 225, No. 4, 745-748, 1975
- [200] E.B. Vinberg, È. B. Vinberg, *The Weyl group of a graded Lie algebra*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **40** (3), 488-526, 709, 1976.
- [201] E.B. Vinberg, V.L. Popov, dans *Algebraic geometry IV*, édité par I.R. Shafarevich (Springer-Verlag), volume 55 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, pp vi+284
- [202] K. Vollbrecht, R. Werner, *Entanglement measures under symmetry*, Phys. Rev. A **64**, 062307, 2001.
- [203] M. B. Wells, *The number of Latin squares of order 8*, J. Combin. Theory **3**, 98-99, 1967.

- [204] J. Weyman, A. Zelevinsky, *Singularities of hyperdeterminant*, Ann. Institut Fourier **46** (3), 591-644, 1996.
- [205] H. Wilf, *Hadamard determinants, Möbius functions, and chromatic number of a graph*, Bulletin of Australian Mathematic Society **74**, 960-964, 1968.
- [206] K. G. Wilson, *Proof of a Conjecture by Dyson*, J. Math. Phys. **3**, 1040-1043, 1962.
- [207] G. Xin, *A fast algorithm for Macmahon's partition analysis*, Electron. J. Combin. **11** (R58) (electronic), 2004.
- [208] P. Zappa, *The Cayley determinant of the determinant tensor and the Alon-Tarsi conjecture*, Adv. Appl. Math. **19**, 31-44, 1997.

# Index

- Adjoint de la multiplication, 39
- Albeggiani
  - formule d', 87
  - formule généralisée d', 88, 90
- Algèbre de Lie graduée, 58
- Anti-mélange, 120
- Aomoto
  - intégrale d', 99
- Apolaire, 47
- Bell
  - inégalités de, 28, 58
- bit quantique, 27
- Catalectiquant, 47
- Cayley
  - hyperdéterminant de, 30
  - opérateur Omega de, 42, 60
- Chen
  - lemme de, 121
- Chevalley
  - section de, 62
- Clos par *pgcd*, 109
- Clos par facteur, 109
- Cohen-Macaulay
  - algèbre de, 44, 51, 73, 75
- Concomitant, 31, 32, 36, 60, 61
- Contravariant, 60
- Convolution, 111
- Covariant, 31, 33, 36, 69
  - dimension des espaces, 38
  - linéaire, 69
  - rationnel, 49
  - série de Hilbert, 40, 41, 44, 69
  - source de, 43
  - système complet, 31, 42, 48
- Coxeter
  - polytope de, 62
- Cryptographie quantique, 57
- de Bruijn
  - intégrale de, 96
  - intégrale de, 121
- del Pezzo
  - surface de, 60
- Demi-treillis, 109
- Dyson
  - conjecture de, 93
- Emary
  - fonctions d', 68
- Ensemble partiellement ordonné, 111
- Équivariance, 33
- Espace
  - de modules, 59
  - des états, 23
  - projectif pondéré, 60
  - de Hilbert, 23
- État
  - complètement intriqué, 25
  - instable, 25
  - intriqué, 24

- mixte, 24
  - pur, 24
  - semi-stable, 25
  - stable, 25
  - factorisable, 28
  - GHZ, 30
  - maximalement intriqué, 58
- Extension linéaire, 112
- F-déterminant, 110
- Fonction
  - $\zeta$ , 111
  - hypergéométrique multivariée, 106
  - multiplicative, 109
- Fonction symétrique
  - élémentaire, 102
  - élémentaires, 38
  - de Schur, 37, 39, 100
  - monomiale, 101
  - somme de puissance, 38
  - somme de puissances, 101
- Forme
  - associée, 49
  - binaire
    - bilinéaire, 27, 36
    - quadrilinéaire, 36, 44
    - quartique, 53
    - quintilinéaire, 51
    - trilinéaire, 35, 41, 72
  - fondamentale, 32
  - multibinaire, 42
  - multilinéaire, 26, 35, 42
  - normale, 43, 47, 48, 62
  - quadrilinéaire, 35
  - ternaire
    - trilinéaire, 35, 60
  - trilinéaire, 35
- Gordan
  - algorithme de, 42
- Gordan et Hilbert
  - théorème de, 43
- Gosset
  - polytope de, 63
- Groupe
  - dynamique, 24
  - Action de, 33
  - de réflexions complexes, 62
  - LSUT, 26, 69
  - LUT, 69
  - SLOCC, 26, 30, 35, 59, 68
  - orbite, 73
- groupe de Weyl, 58
- Heine
  - intégrale de, 95
- Hyperdéterminant, 45, 52
  - d'un produit, 87
  - de Hankel, 93
  - décalé, 102
  - de Selberg, 96
  - de Toëplitz, 102
  - décalé, 102
- Hyperdiscriminant, 46, 68
- Hyperhafnien, 118
- Hypermatrice, 26, 32, 35
  - antisymétrique, 116
  - de Hankel, 93
  - triangulaire, 89
- Hypermineur, 88, 94, 110
- Hyperturéanien, 100
  - décalé, 105
- Inf-hypermatrice, 110
- Inf-matrice, 110
- Informatique quantique, 57
- Invariant, 32, 36



- absolu, 61
- dimension des espaces, 37
- fondamental, 60
- primaire, 51, 53, 73
- relatif, 32, 33
- série de Hilbert, 40, 45, 51
- secondaire, 51, 74
- spécial unitaire, 69
  - série de Hilbert, 69
- système complet, 45
- unitaire, 69
  - série de Hilbert, 69
- Jack
  - polynôme de, 101, 106
    - $C_\lambda^{(\alpha)}$ , 101
    - $J_\lambda^{(\alpha)}$ , 101
    - $P_\lambda^{(\alpha)}$ , 101
    - $Q_\lambda^{(\alpha)}$ , 101
  - quasi-rectangulaire, 103
- Jacobi
  - polynôme de, 106
- Kaneko
  - intégrale, 106
- Klein
  - formenproblem, 62
- Klyachko
  - caractérisation des états intriqués, 25, 30
  - conjecture de, 45
- Krull
  - dimension de, 45
- Lie
  - polynôme de, 119
- Linström-Wilf
  - théorème de, 112
- Möbius
  - inversion de, 111
- mélange, 119
- Macmahon
  - opérateur Omega de, 40
- Matrice
  - de *pgcd*, 109
- Matrice de densité, 24
- Mesure d'intrication, 72
- Miyake
  - classification oignon, 73
- Monotone sur l'intrication, 68
- Observable, 24
  - essentiel, 24
- Opérateur
  - vertex, 38
- Orbite
  - classification, 59
  - fermeture, 59
  - stable, 47
- Paradoxe EPR, 23, 28
- Peano
  - methode de, 42
- Polynôme
  - invariant, 29
  - orthogonal, 100
    - Hermite, 107
    - Laguerre, 107
- Polynôme de Jacobi
  - associé aux polynômes de Jack, 106
- Polytope
  - Complexe, 62
  - Hessien, 63
- poset, 111
- Produit

- d'anti-mélange, 120
- de mélange, 119
- Produit scalaire
  - $\langle \cdot, \cdot \rangle'_{n,\alpha}$ , 101
  - $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ , 101
- q-discriminant, 104
- Quantic, 19
- qubit, 27
- qudot, 27
- qutrit, 27
- Ricien, 87, 90, 110
- Selberg
  - hyperdéterminant, 96
  - intégrale, 93, 96
- Semi-invariant, 43
- Semi-stabilité, 25, 59
- Smith
  - déterminant de, 109
- Source, 43, 49
- Stabilité, 25
- Système
  - composé, 24
  - dynamique quantique, 24
  - quantique, 23
- Syzygie, 50, 73
  - ordre 1, 50
  - ordre 2, 50
- Tableau multiindexé, 26
- Tenseur
  - anti-symétrique, 116
  - triangulaire, 89
- Terme constant, 94
- Toëplitz
  - hyperdéterminant, 102
- Transformation
  - locale spéciale unitaire, 69
- Transvectant, 31, 42, 52, 72
  - multiple, 42, 52, 61
- Transvection, 19
- Vandermonde
  - déterminant de, 93, 95, 102
- Von Neumann
  - principe de, 23
  - entropie de, 68, 72
- Wick
  - formule de
    - bosonique, 119
    - fermionique, 118
- Xin
  - algorithme de, 51, 73, 75